

Capítulo 2

Modelado con ecuaciones diferenciales

La formulación matemática de problemas en ingeniería y ciencia suele conducir a ecuaciones que implican derivadas de una o más funciones desconocidas. Tales ecuaciones se llaman ecuaciones diferenciales.

Precisamente, para ilustrar el concepto de ecuación diferencial y su relación con distintas ramas de las ciencias, vamos a analizar una serie de problemas prácticos donde las ecuaciones diferenciales surgen de forma natural. Aprovecharemos para introducir algunas definiciones que formalizaremos más adelante.

Los modelos matemáticos asociados con las ecuaciones diferenciales en este libro serán simulados con Simulink de MATLAB, en el apéndice 1 se indica la forma de utilizar Simulink para modelar las ecuaciones diferenciales.

2.1. Ecuaciones diferenciales de primer orden

En esta sección simulamos modelos matemáticos que conducen a ecuaciones diferenciales de primer orden, como la evolución de la temperatura de una barra metálica que ha sido calentada hasta una cierta temperatura, los del crecimiento demográfico, la desintegración radiactiva, el interés compuesto continuamente, las reacciones químicas, un líquido que sale por un agujero en un tanque, la velocidad de caída de un cuerpo, la rapidez de memorización y la corriente en un circuito en serie, son ecuaciones diferenciales de primer orden.

2.2. Temperatura de un cuerpo (Ley de enfriamiento de Newton)

Consideremos la ecuación diferencial que, aplicando la ley de enfriamiento de Newton, nos proporciona un modelo para estudiar la evolución de la temperatura de una barra metálica que ha sido calentada hasta una cierta temperatura, T_0 , que llamaremos temperatura inicial, y que a continuación ha sido introducida en un habitáculo a temperatura constante $T = T_a$:

$$\frac{dT}{dt} = k(T(t) - T_a). \quad (2.1)$$

En primer lugar debemos considerar la temperatura inicial: la temperatura de la barra no evolucionará igual si la temperatura inicial de la barra es $50^\circ C$ o si es $75^\circ C$. Al problema de hallar la o las soluciones de la ecuación (2.1) sabiendo que $T(0) = T_0$ se le llama problema de condiciones iniciales para dicha ecuación, y lo escribimos de la siguiente forma:

$$\begin{cases} \frac{dT}{dt} = k(T(t) - T_a) \\ T(0) = T_0 \end{cases} \quad (2.2)$$

Análisis cualitativo

Nuestro objetivo es tener tanta información como sea posible de la solución (veremos más adelante en el curso que solo hay una) de este problema de condiciones iniciales. Es decir, conocer tanto como sea posible acerca de la función $T(t)$ que es solución de la ecuación (2.1) y cumple la condición (2.2). Lo ideal sería tener una expresión explícita de la función $T(t)$. Veremos más adelante que en este caso es posible, pero salvo que necesitemos saber con precisión extrema el valor de T en un instante concreto (digamos $T(60)$, que sería el valor de la temperatura de la barra después de 60 minutos) un simple análisis de la ecuación a partir del significado del concepto de derivada, es suficiente para obtener información muy valiosa sobre la solución.

Observamos en primer lugar que si $T(t) = T_a$ en todo instante, entonces $T(t) - T_a = 0$ y, al sustituir en la ecuación, $\frac{dT}{dt} = 0$ para todo t . Por lo tanto $T(t) = T_a$ es una solución de la ecuación. Este tipo especial de soluciones reciben el nombre de soluciones de equilibrio porque son constante para todo t . Su significado es claro y sencillo: la barra no cambia de temperatura si y solo si la temperatura de la barra y del medio ambiente es la misma siempre.

Si $T_0 = T(0) \neq T_a$ entonces en el momento inicial $t = 0$

$$\frac{dT}{dt}(0) = k(T_0 - T_a) \neq 0 \quad (2.3)$$

y en consecuencia hay variación de temperatura; es decir, la temperatura de la barra no se mantiene constante. Si $k > 0$ y $T(0) > T_a$ entonces $\frac{dT}{dt} > 0$ y la temperatura estaría creciendo. Esto no concuerda con lo que sucede en la realidad: si la temperatura de la barra es superior a la del medio ambiente, la temperatura de la barra decrece, es decir la barra se enfría. Así que conviene añadir a nuestra ecuación o bien que la constante k es negativa, o bien escribir la ecuación como

$$\frac{dT}{dt} = -k(T(t) - T_a)$$

siendo k una constante positiva, que es lo que se suele hacer habitualmente. Así pues escribiremos nuestro problema de condiciones iniciales de la siguiente forma:

$$\begin{cases} \frac{dT}{dt} = -k(T(t) - T_a) \\ T(0) = T_0 \end{cases}$$

Ahora, si $T(0) > T_a$ entonces $\frac{dT}{dt} < 0$ con lo que la temperatura de la barra decrecerá; es decir, para $t_1 > 0$ pero muy próximo a $t = 0$, $T(t_1) < T(0)$ y $T(t_1) - T_a < T(0) - T_a$. Por lo tanto,

$$\frac{dT}{dt}(t_1) = -k(T(t_1) - T_a) > -k(T(0) - T_a) = \frac{dT}{dt}(0)$$

Si t_1 está próximo a 0, la temperatura de la barra decrecerá, pero no lo suficiente como para que sea inferior a T_a . Así pues, $T(t_1) - T_a > 0$ y $0 > T'(t_1) > T'(0)$. Es decir, la derivada será negativa, por lo que la temperatura seguirá decreciendo. Así si $t_2 > t_1$ y es próximo a t_1 tendremos que $T(t_2) < T(t_1)$, y un análisis como el que hemos hecho para 0 y t_1 nos permitirá concluir que

$$\frac{dT}{dt}(t_2) = -k(T(t_2) - T_a) > -k(T(t_1) - T_a) = \frac{dT}{dt}(t_1).$$

Podría pensarse que es posible que $T(t_2) < T_a$. La observación de la realidad nos dice que esto nunca ocurre. Ahora no podemos demostrarlo pero veremos más adelante en el curso que esto también se deduce de las propiedades de las ecuaciones diferenciales. Todavía no estamos preparados para hacerlo, pero vamos a seguir suponiendo que $T(t_2) > T_a$ de modo que $0 > T'(t_2) > T'(t_1)$. Y podríamos seguir el análisis con un $t_3 > t_2$ pero próximo a t_2 .

En conclusión, la derivada $T'(t)$ siempre es negativa, cada vez mayor y, por lo tanto, cada vez más próxima a 0. Esto significa que la gráfica de $T(t)$ es una curva decreciente pero que este decrecimiento es cada menor a medida que el tiempo t aumenta. En definitiva, a medida que transcurre el tiempo el valor de la temperatura de la barra se acerca más y más, pero cada vez más lentamente, al valor de la

temperatura del habitáculo. Esto concuerda completamente con lo que la observación de la realidad nos dice que sucede.

Si comenzamos con una condición inicial diferente obtendremos una función $T(t)$ diferente.

Podría ser, por ejemplo, que lo que suceda es que el habitáculo sea un horno que se mantiene a una temperatura constante T_a , y lo que se pretende es calentar la barra,

inicialmente más fría que la temperatura del horno. En este caso, la condición inicial es $T_0 = T(0) < T_a$. Haciendo un análisis como el de más arriba tenemos que $\frac{dT}{dt} > 0$ en $t = 0$ y la función temperatura es creciente. La diferencia $T_a - T(t)$ es cada vez más pequeña para $t > 0$ y previsiblemente la gráfica de la función temperatura será parecida a la de la Figura 2.1.

Este análisis de la manera en la que $T(t)$ evoluciona cuando t aumenta se llama análisis cualitativo de la ecuación diferencial. Si lo que nos interesa es tener una idea de cómo evoluciona la temperatura de la barra a medida que pasa el tiempo, este análisis es suficiente: predice que cualquiera que sea su temperatura inicial (la condición inicial del problema) la temperatura de la barra se aproxima más y más a la temperatura del medio ambiente a medida que transcurre el tiempo. Además, predice también que la rapidez con la que $T(t)$ se aproxima a T_a depende de la constante k . En efecto, como $k > 0$ la variación de T ; es decir, $\frac{dT}{dt}$ es tanto mayor (si $T(t) - T_a < 0$), o tanto menor (si $T(t) - T_a > 0$), cuanto mayor sea k .

Por lo tanto $T(t)$ se aproxima a T_a tanto más rápidamente cuanto mayor sea la constante k . Esta constante k depende de la materia de la que está hecha la barra y está relacionada con su calor específico.

Resolvemos la ecuación diferencial, que es claramente de variables separables:

$$\begin{aligned} T'(t) &= k(T(t) - T_a) \Rightarrow \frac{dT}{T(t) - T_a} = k dt \Rightarrow \int \frac{dT}{T(t) - T_a} = kt + C_1 \\ &\Rightarrow \ln |T(t) - T_a| = kt + C_1 \Rightarrow |T(t) - T_a| = e^{kt+C_1} = Ce^{kt} \Rightarrow \\ T(t) &= T_a + Ce^{kt}, \quad C \in \mathbb{R}^*. \end{aligned}$$

que es la temperatura del cuerpo en el instante $t \geq 0$.

Para tener bien determinada la temperatura $T(t)$, son necesarias dos condiciones adicionales que permitan calcular valores únicos para las constantes C y k . Estas condiciones podrían ser las temperaturas del cuerpo en dos instantes cualesquiera y una de ellas podría ser la temperatura inicial T_0 .

Ejemplo 2.1 *Un cuerpo que tiene una temperatura de $70^\circ F$ es depositado (en el tiempo $t = 0$) en un lugar donde la temperatura se mantiene a $40^\circ F$. Después de 3 minutos, la temperatura del cuerpo ha disminuido a $60^\circ F$.*

¿Cuál es la temperatura del cuerpo después de 5 minutos?

Ejemplo 2.2 *¿Cuánto tiempo pasará para que el cuerpo tenga $50^\circ F$?*

Solución Si $T(t)$ es la temperatura del cuerpo en $^\circ F$ después de t minutos, entonces la ecuación diferencial que modela a $T(t)$ es

$$T'(t) = k(T(t) - T_a),$$

donde $T_a = 40^\circ F$ es la temperatura fija del medio circundante. Las condiciones adicionales son $T(0) = 70$ y $T(3) = 60$.

La solución de este problema está dada por: $T(t) = T_a + Ce^{kt}$, con $T_a = 40$, es decir, $T(t) = 40 + Ce^{kt}$. Ahora,

$$T(0) = 70 \iff 70 = 40 + Ce^{k \cdot 0} \iff 70 = 40 + C \implies C = 30,$$

por lo que, $T(t) = 40 + 30e^{kt}$. Se sigue entonces que:

$$\begin{aligned} T(3) &= 60 \iff 60 = 40 + 30e^{3k} \iff 2 = 3e^{3k} \implies e^{3k} = \frac{2}{3} \\ &\implies 3k = \ln\left(\frac{2}{3}\right) \implies k = \frac{1}{3} \ln\left(\frac{2}{3}\right) \implies k \approx -0,1352. \end{aligned}$$

Luego,

$$T(t) = 40 + 30e^{-0,1352t}.$$

La temperatura del cuerpo después de 5 minutos es

$$T(5) = 40 + 30e^{(-0,1352) \cdot 5} = 55,2594 \Rightarrow T(5) \approx 55,26^\circ F.$$

El tiempo para que el cuerpo tenga $50^\circ F$ es

$$\begin{aligned} T(t) &= 50 \Leftrightarrow 50 = 40 + 30e^{-0,1352t} \Rightarrow e^{-0,1352t} = \frac{1}{3} \Rightarrow -0,1352t = \ln\left(\frac{1}{3}\right) \\ \Rightarrow t &= \frac{\ln 3}{0,1352} \Rightarrow t = \frac{1,0986}{0,1352} \approx 8,1258 \text{ minutos.} \end{aligned}$$

Entonces el cuerpo tendrá una temperatura de $50^\circ F$ después de $t = 8$ minutos con 8 segundos.

Estos resultados se pueden simular fácilmente utilizando Simulink de MATLAB, la figura 2.1 muestra un diagrama de bloques que modela la ecuación diferencial (2.2)

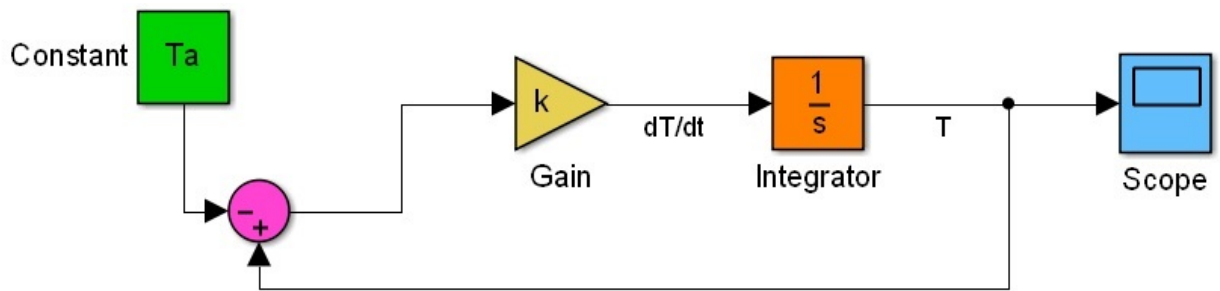


Figura 2.1 Diagrama de control que modela la ecuación de temperatura $\frac{dT}{dt} = k(T - T_a)$.

Revise el Apéndice 1 para ver como se puede ejecutar el modelo de Simulink en MATLAB, después de realizar la simulación se obtiene la figura 2.2.

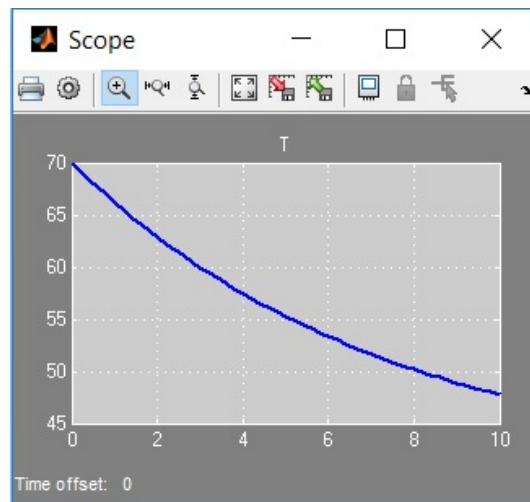


Figura 2.2 Simulación de la ecuación temperatura.

Como se puede observar en la figura 2.2 la temperatura disminuye a $T = 50^\circ$ cuando el tiempo es $t = 8$ min. La ventaja de realizar una simulación en **Simulink** es que se puede cambiar fácilmente el valor de los parámetros y rápidamente obtener otra simulación, en los siguientes ejemplos se utiliza el mismo modelo (2.1) para encontrar las diferentes soluciones a los problemas planteados.

Ejemplo 2.3 Un objeto que tiene una temperatura $50^\circ F$ se coloca a las 10:00 horas en un horno que se mantiene a $375^\circ F$. A las 11:15 horas su temperatura era $125^\circ F$. ¿A qué hora estará el objeto a $150^\circ F$?

En este caso $T_a = 375^\circ F$ es la temperatura constante del medio circundante. Puesto que de 10 am a 11:15 am transcurren 75 minutos, las condiciones adicionales son $T(0) = 50$ y $T(75) = 125$. Luego la temperatura $T(t)$ del objeto está dada por

$$T(t) = T_a + Ce^{kt} \Rightarrow T(t) = 375 + Ce^{kt}$$

Ahora, usando la condición inicial:

$$T(0) = 50 \Leftrightarrow 375 + Ce^{k \cdot 0} = 50 \Rightarrow C = -325.$$

Por lo que, $T(t) = 375 - 325e^{kt}$.

Usando la segunda condición:

$$T(75) = 125 \Leftrightarrow 375 - 325e^{75k} = 125 \Rightarrow e^{75k} = \frac{10}{13} \Rightarrow k = \frac{1}{75} \ln\left(\frac{10}{13}\right) \approx -0,0035.$$

Luego,

$$T(t) = 375 - 325e^{-0,0035t}.$$

El objeto alcanzará la temperatura de $T = 150^\circ F$ cuando:

$$\begin{aligned} T(t) &= 150 \Leftrightarrow 375 - 325e^{-0,0035t} = 150 \Rightarrow e^{-0,0035t} = \frac{9}{13} \Rightarrow -0,0035t = \ln\left(\frac{9}{13}\right) \\ \Rightarrow t &= -\frac{1}{0,0035} \ln\left(\frac{9}{13}\right) = \frac{0,367725}{0,0035} \approx 105,06 \text{ min.} \end{aligned}$$

Es decir, la temperatura del objeto será $T = 150^\circ F$ después de $t = 105$ minutos, a partir de las 10 de la mañana. Por lo tanto, la temperatura será $150^\circ F$ aproximadamente a las 11:45 horas, figura 2.3.

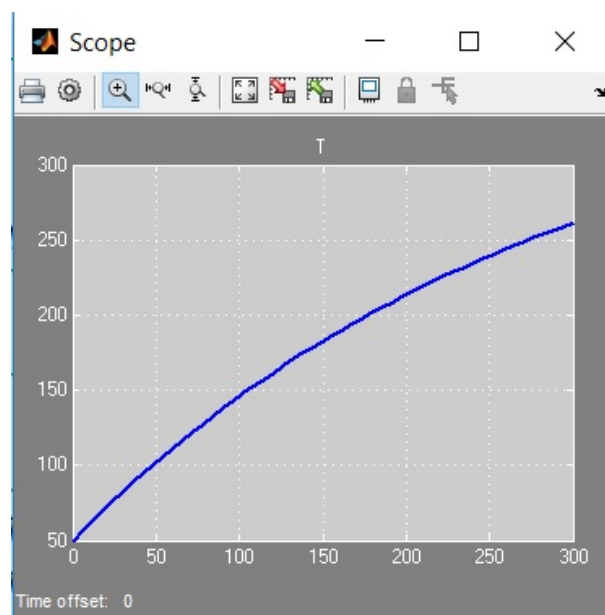


Figura 2.3 Simulación con $T_a = 375^\circ$ y $T(0) = 50^\circ$.

Ejemplo 2.4 Una taza de café cuya temperatura es $190^\circ F$ se coloca en un cuarto cuya temperatura es $65^\circ F$. Dos minutos más tarde la temperatura del café es $175^\circ F$. ¿Después de cuánto tiempo la temperatura del café será $150^\circ F$?

Solución. Sea $T(t)$ la temperatura (en $^\circ F$) del café en el instante $t \geq 0$ min. Observamos que $T(0) = 190$, $T_a = 65$ y $T(2) = 175$.

La temperatura del café en cualquier instante $t \geq 0$ es

$$T(t) = T_a + Ce^{kt} \Rightarrow T(t) = 65 + Ce^{kt}.$$

Usando la condición inicial, tenemos:

$$T(0) = 190 \Leftrightarrow 65 + Ce^{k \cdot 0} = 190 \Rightarrow C = 125 \Rightarrow T(t) = 65 + 125e^{kt}.$$

Ahora usamos la segunda condición:

$$T(2) = 175 \Leftrightarrow 65 + 125e^{2k} = 175 \Rightarrow e^{2k} = \frac{22}{25} \Rightarrow k = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{22}{25}\right) \Rightarrow k \approx -0,0639$$

Entonces:

$$T(t) = 65 + 125e^{-0,0639t},$$

que es la temperatura (en $^{\circ}F$) del café en el minuto $t \geq 0$.

Sea t_1 el instante en que $T(t_1) = 150$. Tenemos entonces:

$$\begin{aligned} T(t_1) &= 150 \Leftrightarrow 65 + 125e^{-0,0639t_1} = 150 \Rightarrow e^{-0,0639t_1} = \frac{85}{125} \\ \Rightarrow t_1 &= -\frac{1}{0,0639} \ln\left(\frac{85}{125}\right) \approx 6,0354 \text{ min.} \end{aligned}$$

Por lo tanto deben transcurrir $t_1 = 6$ min, 2 s para que la temperatura del café sea de $150^{\circ}F$.

Otra forma de obtener una solución al problema de valor inicial es utilizando el comando **dsolve**, para nuestro ejemplo utilice los siguientes comandos:

```
>> syms T t k
>> dsolve('DT-k*(T-65)=0,T(0)=190')
>> ans = 125*exp(k*t) + 65
```

Observe que el resultado que devuelve MATLAB coincide con el resultado teórico del ejemplo.

Ejemplo 2.5 Un termómetro en el que se lee $70^{\circ}F$ se coloca en un lugar donde la temperatura es $10^{\circ}F$. Cinco minutos más tarde el termómetro marca $40^{\circ}F$. ¿Qué tiempo debe transcurrir para que el termómetro marque medio grado más que la temperatura del medio ambiente?

Solución. Sea $T(t)$ la temperatura (en $^{\circ}F$) del termómetro en el instante $t \geq 0$ min. Observamos que $T(0) = 70$; $T_a = 10$ y $T(5) = 40$.

El PVI por resolver es

$$\frac{d}{dt}T(t) = k(T(t) - 10), \text{ con } T(0) = 70 \text{ y además } T(5) = 40.$$

La solución es

$$T(t) = T_a + Ce^{kt} \Rightarrow T(t) = 10 + Ce^{kt}.$$

Utilizamos la condición inicial:

$$T(0) = 70 \Leftrightarrow 10 + Ce^{k \cdot 0} = 70 \Rightarrow C = 60 \Rightarrow T(t) = 10 + 60e^{kt}.$$

La segunda condición nos permite calcular k :

$$T(5) = 40 \Leftrightarrow 10 + 60e^{5k} = 40 \Rightarrow e^{5k} = \frac{30}{60} = \frac{1}{2} \Rightarrow k = \frac{1}{5} \ln\left(\frac{1}{2}\right) \Rightarrow k \approx -0,1386.$$

En conclusión:

$$T(t) = 10 + 60e^{-0,1386t}.$$

Sea t_1 el minuto en que $T(t_1) = 10,5^{\circ}F$.

$$\begin{aligned} T(t_1) &= 10,5 \Leftrightarrow 10 + 60e^{-0,1386t_1} = 10,5 \Rightarrow e^{-0,1386t_1} = \frac{0,5}{60} = \frac{1}{120} \\ \Rightarrow t_1 &= -\frac{1}{0,1386} \ln\left(\frac{1}{120}\right) \approx 34,57 \text{ min.} \end{aligned}$$

Por lo tanto, el tiempo que debe transcurrir para que el termómetro marque medio grado más que la temperatura ambiente es $t_1 = 34$ minutos, 34 segundos.

Ejemplo 2.6 Un termómetro que está en el interior de una habitación se lleva al exterior donde la temperatura es $5^\circ F$. Después de 1 min el termómetro marca $55^\circ F$ y después de 5 minutos marca $30^\circ F$. ¿Cuál era la temperatura del termómetro en la habitación?

Solución. Sea $T(t)$ la temperatura (en $^\circ F$) del termómetro en el instante $t \geq 0$ minutos. Tenemos: $T_a = 5$; $T(1) = 55$; $T(5) = 30$ y $T(0) = T_0$, que es la temperatura a determinar.

Al resolver la ED, resulta:

$$T(t) = T_a + Ce^{kt} \implies T(t) = 5 + Ce^{kt}.$$

Usando la condición inicial:

$$T(0) = T_0 \iff 5 + Ce^{k \cdot 0} = T_0 \implies C = T_0 - 5 \implies T(t) = 5 + (T_0 - 5)e^{kt}.$$

Usando ahora las dos condiciones dadas:

$$T(1) = 55 \iff 5 + (T_0 - 5)e^k = 55 \implies (T_0 - 5)e^k = 50 \implies T_0 - 5 = 50e^{-k}. \quad (*)$$

$$T(5) = 30 \iff 5 + (T_0 - 5)e^{5k} = 30 \implies (T_0 - 5)e^{5k} = 25 \implies T_0 - 5 = 25e^{-5k}. \quad (**)$$

Las expresiones (*) y (**) conforman un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas (T_0 y k). Entonces,

$$T_0 - 5 = 50e^{-k} \quad \text{y} \quad T_0 - 5 = 25e^{-5k} \implies 50e^{-k} = 25e^{-5k} \implies e^{4k} = \frac{1}{2} \implies k = \frac{1}{4} \ln\left(\frac{1}{2}\right) \approx -0,1733.$$

Utilizando el valor de k en (*):

$$T_0 - 5 = 50e^{-k} \implies T_0 = 5 + 50e^{0,1733} \implies T_0 \approx 64,46^\circ F.$$

Es la temperatura que marcaba el termómetro en la habitación.

Ejemplo 2.7 En una habitación la temperatura que marca un termómetro clínico es $20^\circ C$. Para detectar si un paciente tiene fiebre (definida como temperatura corporal de $38^\circ C$ o más) se coloca un termómetro en la axila del paciente. Si al cabo de un minuto el termómetro marca $27^\circ C$ en una persona sana (con temperatura de $36^\circ C$), ¿cuánto tiempo se debe dejar en una persona con fiebre para detectarla con un error no mayor que $0,2^\circ C$?

Solución. Si $T(t)$ es la temperatura que marca el termómetro a los t minutos, entonces:

$$T(0) = 20^\circ C; \quad T(1) = 27^\circ C \quad \text{y} \quad T_a = 36^\circ C.$$

Con estos datos podemos obtener el valor de k , que en cierta forma mide la sensibilidad del termómetro.

El PVI es

$$\frac{d}{dt}T(t) = k(T(t) - 36), \quad \text{con } T(0) = 20 \quad \text{y además } T(1) = 27.$$

Sabemos que

$$T(t) = T_a + Ce^{kt} \implies T(t) = 36 + Ce^{kt}.$$

Usando la condición inicial:

$$T(0) = 20 \iff 36 + Ce^{k \cdot 0} = 20 \implies C = -16 \implies T(t) = 36 - 16e^{kt}.$$

Usamos ahora la segunda condición:

$$T(1) = 27 \iff 36 - 16e^k = 27 \implies 16e^k = 9 \implies e^k = \frac{9}{16} \implies k = \ln\left(\frac{9}{16}\right) = -0,57536.$$

Como se dijo, este valor de k es una constante del termómetro. Si ese mismo termómetro se usa en un paciente que tal vez tenga fiebre ($T_a \geq 38^\circ C$ ahora, con T_a no conocida), entonces resolvemos el PVI:

$$\frac{d}{dt}T(t) = -0,57536(T(t) - T_a), \quad \text{con } T(0) = 20,$$

y hallamos el valor de t de modo que $T(t) \geq T_a - 0,2$. Tendremos $T(t) = T_a + Ce^{-0,57536t}$, pero aquí

$$T(0) = 20 \implies T_a + C = 20 \implies C = 20 - T_a,$$

así que la temperatura marcada por el termómetro para el tiempo $t \geq 0$ es

$$T(t) = T_a + (20 - T_a)e^{-0,57536t}.$$

Es preciso comparar esta expresión con $T_a - 0,2$ y resolver para t :

$$\begin{aligned} T(t) &= T_a + (20 - T_a)e^{-0,57536t} \geq T_a - 0,2 \implies (T_a - 20)e^{-0,57536t} \leq 0,2 \implies e^{-0,57536t} \leq \frac{0,2}{T_a - 20} \\ \implies -0,57536t &\leq \ln\left(\frac{0,2}{T_a - 20}\right) \implies t \geq -\frac{1}{0,57536} \ln\left(\frac{0,2}{T_a - 20}\right) \\ \implies t &\geq \frac{\ln(0,2)}{-0,57536} - \frac{\ln(T_a - 20)}{-0,57536} = 2,7973 + \frac{\ln(T_a - 20)}{0,57536}. \end{aligned}$$

El último término está en función de la temperatura T_a del paciente, que no se conoce en principio; sin embargo podemos hacer una estimación, pues en seres humanos T_a es cuando mucho 42°C en casos extremos.

El valor del último término sería entonces cuando mucho $\frac{\ln(42 - 20)}{0,57536} = \frac{\ln(22)}{0,57536} = 5,3724$ y esto sumado al primer término daría un total de $t \geq 8,17$ minutos, alrededor 8 minutos 10 segundos. Por lo tanto, para detectar una $T_a = 38^\circ\text{C}$ se requerirían $2,7973 + \frac{\ln(18)}{0,57536} = 7,82$ minutos, o sea, alrededor de 7 minutos 50 segundos.

Un caso de aplicación de la ley de Enfriamiento de Newton en medicina, relacionado con lo anterior, consiste en determinar la hora en que falleció una persona cuyo cadáver se encuentra en un medio ambiente frío. La homeostasis, o conjunto de funciones vitales de un individuo, regula su temperatura corporal (en condiciones normales, sin enfermedad) entre 36 y $36,5^\circ\text{C}$; sin embargo al morir, el cadáver del individuo se comporta como un cuerpo caliente en un medio frío (puesto que su organismo ya no produce calor), como lo ilustra el siguiente ejemplo:

Ejemplo 2.8 Un ganadero salió una tarde a cazar un lobo solitario que estaba diezmando su rebaño. El cuerpo del ganadero fue encontrado sin vida por un campesino, en un cerro cerca del rancho junto al animal cazado, a las 6:00 h del día siguiente. Un médico forense llegó a las 7:00 y tomó la temperatura del cadáver, a esa hora anotó 23°C ; una hora más tarde, al darse cuenta de que en la noche, y aún a esas horas, la temperatura ambiente era aproximadamente de 5°C , el médico volvió a medir la temperatura corporal del cadáver y observó que era de $18,5^\circ\text{C}$. ¿A qué hora murió el ganadero aproximadamente?

Solución. Podemos suponer por la información proporcionada, que la temperatura ambiente se mantuvo casi constante $T_a = 5^\circ\text{C}$ y también que hasta el instante de su muerte, cuyo momento desconocemos, la temperatura corporal del ganadero fue de 36°C .

Tiene mucho sentido que el forense haya tomado dos mediciones de la temperatura del cuerpo, para determinar el valor de k . Podemos denotar por $T(t)$ la temperatura del cuerpo al tiempo t , medido en horas; por comodidad, hagamos $t = 0$ a las 7:00 h y $t = 1$ a las 8:00 h, así que tenemos el PVI:

$$\frac{d}{dt}T(t) = k(T(t) - T_a), \quad \text{con } T(0) = 23^\circ\text{C} \text{ y además } T(1) = 18,5^\circ\text{C},$$

con $T_a = 5^\circ\text{C}$. Se busca determinar el tiempo (negativo) t_0 en el que $T(t_0) = 36^\circ\text{C}$. Al resolver la ED sabemos que:

$$T(t) = T_a + Ce^{kt} \implies T(t) = 5 + Ce^{kt} \implies T(t) - 5 = Ce^{kt}.$$

Al usar las condiciones resulta

$$T(0) = 23 \Leftrightarrow 18 = Ce^{k \cdot 0} \implies C = 18 \implies T(t) = 5 + 18e^{kt} \implies T(t) - 5 = 18e^{kt}.$$

$$T(1) = 18,5 \implies 13,5 = 18e^k \implies e^k = \frac{13,5}{18} \implies k = \ln\left(\frac{13,5}{18}\right) = -0,2877.$$

En síntesis, por lo anterior: $T(t) = 5 + 18e^{-0,2877t}$ es la solución del PVI.

Para determinar t_0 , consideramos $T(t_0) = 36$ y resolvemos:

$$36 = 5 + 18e^{-0,2877t_0} \implies e^{-0,2877t_0} = \frac{31}{18} \implies t_0 = -\frac{1}{0,2877} \ln\left(\frac{31}{18}\right) = -1,8895 \approx 1 \text{ hora } 53 \text{ minutos}.$$

Comprobamos que el deceso ocurrió aproximadamente 1 h y 53 min antes de las 7:00 (hora de la primera toma de temperatura), esto es, alrededor de las 5:07 horas.

The differential equation.

$T' = k(T - T_a)$

The independent variable is t

Parameters & expressions:

k	=	-0.28		=	
T_a	=	5		=	

The display window.

The minimum value of t =	0	The minimum value of T =	0
The maximum value of t =	10	The maximum value of T =	10

Buttons: Quit, Revert, Proceed

Figura 2.4 Ajustes de parámetros para dfield8.

La gráfica de la figura 2.4 muestra la configuración de los parámetros del comando **dfield8** que permite simular la ecuación diferencial y se puede observar figura 2.5 que todas las soluciones convergen a la temperatura del medio ambiente $T_a = 5^\circ C$.

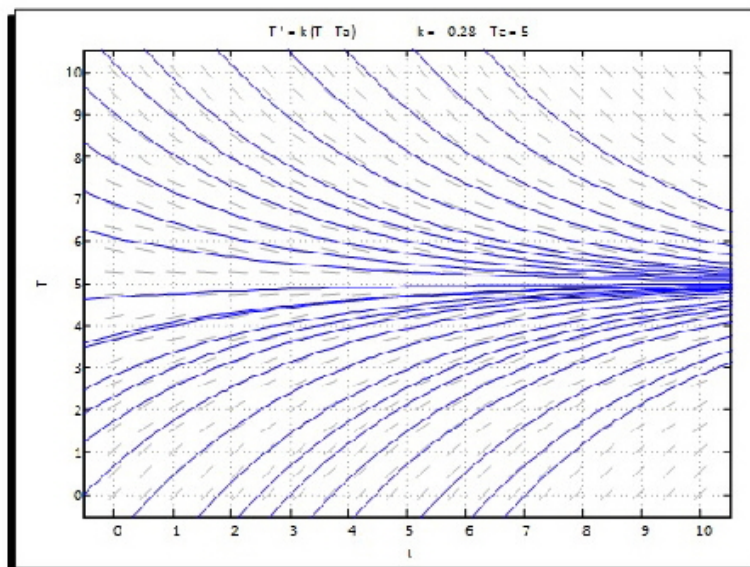


Figura 2.5 Campos direccionales de la edo $\frac{d}{dt}T(t) = k(T(t) - T_a)$, con $k = -0.28$, $T_a = 5^\circ C$

Autoevaluación (Taller en grupo)

Desarrolle el diagrama de bloques que permita encontrar la simulación de los siguientes problemas y compare con la solución exacta.

1. Un recipiente con agua a una temperatura de $100^{\circ}C$ se coloca en una habitación que se mantiene a una temperatura constante de $25^{\circ}C$. Después de 3 min la temperatura del agua es de $90^{\circ}C$. Determinar la temperatura del agua después de 15 min. ¿Cuánto tiempo deberá transcurrir para que la temperatura del agua sea de $40^{\circ}C$? (Respuesta: $67^{\circ}C$; 33 min, 44 s)

2. Un termómetro se saca de un recinto donde la temperatura del aire es $70^{\circ}F$ y se lleva al exterior, donde la temperatura es $10^{\circ}F$. Pasado $\frac{1}{2}$ minuto el termómetro indica $50^{\circ}F$. ¿Cuál es la lectura cuando $t = 1 \text{ min}$? ¿Cuánto tiempo se necesita para que el termómetro llegue a $15^{\circ}F$?

Ejercicios. Ley de Enfriamiento de Newton.

1. La temperatura de un motor en el momento en que se apaga es de $200^{\circ}C$ y la temperatura del aire que lo rodea es de $30^{\circ}C$. Después de 10 min la temperatura del motor ha bajado a $180^{\circ}C$. ¿Cuánto tiempo transcurrirá para que la temperatura del motor disminuya hasta $40^{\circ}C$? (Respuesta: 3 h, 46 min, 18 s)
2. Un termómetro se saca de una habitación donde la temperatura del aire es de $70^{\circ}F$ al exterior donde la temperatura es de $10^{\circ}F$. Después de medio minuto el termómetro marca $50^{\circ}F$. ¿Cuánto marca el termómetro cuando $t = 1$ min? ¿Cuánto tiempo deberá transcurrir para que la temperatura marcada por el termómetro sea de $15^{\circ}F$? (Respuesta: $36,7^{\circ}F$; 3 min, 4 s)
3. Una taza de café caliente, inicialmente a $95^{\circ}C$, al estar en una habitación que tiene una temperatura constante de $21^{\circ}C$, se enfría hasta $80^{\circ}C$ en 5 min. Determinar la temperatura del café después de 10 min. ¿Cuánto tiempo deberá transcurrir para que el café tenga una temperatura de $50^{\circ}C$? (Respuesta: $68^{\circ}C$; 20 min, 41 s)
4. Una barra metálica, cuya temperatura inicial es de $20^{\circ}C$, se deja caer en un recipiente que contiene agua hirviendo (a $100^{\circ}C$) y su temperatura aumenta $2^{\circ}C$ después de 1 s. Determinar la temperatura de la barra metálica después de 10 s. ¿Cuánto tiempo deberá transcurrir para que la temperatura de la barra sea de $60^{\circ}C$? (Respuesta: $37,9^{\circ}C$; 27,38 s)
5. Un termómetro que indica $70^{\circ}F$ se coloca en un horno precalentado y mantenido a temperatura constante. A través de una ventana de vidrio del horno, un observador registra que la temperatura marcada por el termómetro es de $110^{\circ}F$ después de medio minuto y de $145^{\circ}F$ después de 1 min. ¿A qué temperatura está el horno? (Respuesta: $390^{\circ}F$)
6. Un termómetro en el que se lee $80^{\circ}F$ se lleva al exterior. Cinco minutos más tarde el termómetro indica $60^{\circ}F$. Después de otros 5 min el termómetro señala $50^{\circ}F$. ¿Cuál es la temperatura del exterior? (Respuesta: $40^{\circ}F$)
7. Un material cerámico se saca en cierto momento de un horno cuya temperatura es de $750^{\circ}C$, para llevarlo a una segunda etapa de un proceso que requiere que el material se encuentre a una temperatura de cuando mucho $200^{\circ}C$. Suponga que la temperatura de una sala de enfriamiento donde se colocará este cerámico es de $5^{\circ}C$ y que, después de 15 min, la temperatura del material es de $600^{\circ}C$. (Respuesta: 1 h, 29 min, 22 s.) ¿En cuánto tiempo el material cerámico estará listo para entrar a la segunda etapa de su proceso?
8. A las 13:00 horas un termómetro que indica $10^{\circ}F$ se retira de un congelador y se coloca en un cuarto cuya temperatura es de $66^{\circ}F$. A las 13:05, el termómetro indica $25^{\circ}F$. Más tarde, el termómetro se coloca nuevamente en el congelador. A las 13:30 el termómetro da una lectura de $32^{\circ}F$. ¿Cuándo se regresó el termómetro al congelador?; ¿cuál era la lectura del termómetro en ese momento? (Respuesta: 13 h 20 min 19 segundos; $50,22^{\circ}F$.)
9. Luis invitó a Blanca a tomar café en la mañana. Él sirvió dos tazas de café. Blanca le agregó crema suficiente como para bajar la temperatura de su café $1^{\circ}F$. Después de 5 min, Luis agregó suficiente crema a su café como para disminuir su temperatura en $1^{\circ}F$. Por fin, tanto Luis como Blanca empezaron a tomar su café. ¿Quién tenía el café más frío? (Respuesta: Luis)

2.3. Modelo de Malthus

Fue al parecer Euler quien desarrolló los primeros modelos de población, pero comúnmente se atribuye a Malthus el desarrollo y análisis del primer modelo de evolución de $P(t)$, según el cual

$$P'(t) = kP(t). \quad (2.4)$$

Es decir, en cada instante la rapidez de cambio de la población es proporcional al total de la población presente. Por ejemplo, si $P(t) > 0$ y $P(t)$ creciente, esto implica que $k > 0$.

Thomas Malthus (1776-1834) fue un economista inglés, considerado el fundador de la demografía. Es muy famoso por su publicación "*Ensayo sobre el principio de la población (1798)*" en la cual concluía que

la población humana crece de manera exponencial, mientras que la producción total de alimentos crece en forma lineal, pronosticando un futuro sombrío para la población. Afortunadamente su predicción no se ha cumplido. Sus ideas tuvieron alguna influencia en la teoría de la evolución de Darwin.

Resolvemos la ecuación diferencial (2.4): separando variables

$$\frac{dP}{dt} = kP(t) \implies \frac{dP}{P} = K dt, \quad (2.5)$$

integrando se tiene:

$$\int \frac{dP}{P} = k \int dt \implies \ln P = kt + C_1 \implies P = e^{kt+C_1} \implies P = Ce^{kt} \implies P(t) = Ce^{kt}. \quad (2.6)$$

Esta es la solución general de la ecuación diferencial (2.4).

Es común conocer la población inicial, $P(0) = P_0$. Con esto podemos calcular la constante C :

$$P(0) = P_0 = Ce^{k \cdot 0} \implies C = P_0 \implies P(t) = P_0 e^{kt}. \quad (2.7)$$

Para calcular k es necesario conocer la cantidad de población existente en un tiempo $t_1 > t_0$, digamos $P(t_1) = P_1$. Luego

$$P(t_1) = P_1 = P_0 e^{kt_1} \implies e^{kt_1} = \frac{P_1}{P_0} \implies t_1 = \frac{1}{k} \ln \left(\frac{P_1}{P_0} \right) \quad (2.8)$$

Observaciones:

1. Si t_d es el tiempo en el que la población se duplica, $P(t_d) = 2P_0$; entonces tenemos, de acuerdo con la ecuación previa:

$$P(t_d) = 2P_0 \iff P_0 e^{kt_d} = 2P_0 \implies e^{kt_d} = 2 \implies t_d = \frac{1}{k} \ln 2$$

Lo anterior indica que el tiempo para que una población se duplique no depende de la cantidad inicial de la misma.

2. Si se proporcionan $P(t_1) = P_1$ y $P(t_2) = P_2$ para dos tiempos $t_1 < t_2$, obtenemos los siguientes resultados:

$$\begin{cases} P(t_1) = P_1 = P_0 e^{kt_1} \\ P(t_2) = P_2 = P_0 e^{kt_2} \end{cases}$$

Para resolver este sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, C y k , dividimos la segunda ecuación entre la primera y obtenemos:

$$\frac{P_2}{P_1} = e^{k(t_2-t_1)},$$

entonces:

$$\frac{P_2}{P_1} = e^{k(t_2-t_1)} \implies k = \frac{1}{t_2-t_1} \ln \left(\frac{P_2}{P_1} \right) \implies k = \frac{\ln(P_2) - \ln(P_1)}{t_2 - t_1}.$$

3. Tenemos también, usando (2.7) que $C = P_1 e^{-kt_1}$. Como $P(t) = Ce^{kt}$: $P(t) = Ce^{kt} \implies P(t) = P_1 e^{-kt_1} e^{kt} \implies P(t) = P_1 e^{k(t-t_1)}$, con k dado por (2.8).

Hemos mencionado que la derivada $\frac{dP}{dt}$ es la rapidez de cambio de la población $P(t)$. A esta derivada también se le denomina tasa de cambio de la población. De aquí surge una expresión frecuentemente usada en los problemas de población: tasa de crecimiento.

La tasa de crecimiento de una población en cierto tiempo t se define como la razón $\frac{P'(t)}{P(t)}$ y se da comúnmente en términos porcentuales anuales. Es decir, la tasa de crecimiento de una población es precisamente la constante de proporcionalidad $k = \frac{P'(t)}{P(t)}$. Recuérdese que $P'(t) = k P(t)$.

4. Así como $P(t) = P_0 e^{kt}$ nos sirve para calcular la población creciente de una comunidad, es posible utilizarla para calcular una población que disminuye al paso del tiempo. Solo debemos tener presente que:

- a) Si la población $P(t)$ aumenta, entonces $\frac{d}{dt}P(t) = kP(t)$, con $k > 0$.
- b) Si la población $P(t)$ disminuye, entonces $\frac{d}{dt}P(t) = kP(t)$, con $k < 0$.

Ejemplo 2.9 En un cultivo de bacterias, se estimó que inicialmente había 150 bacterias y 200 después de una hora (h). Suponiendo una rapidez de crecimiento proporcional a la cantidad de bacterias presente, determinar:

1. La cantidad de bacterias después de t horas.
2. La cantidad de bacterias después de 2 h.
3. El tiempo que debe transcurrir para que la población se triplique.

Solución.

1. Si $P(t)$ es la cantidad de bacterias presentes después de t horas, entonces $P(0) = P_0 = 150$ y $P(1) = P_1 = 200$. Luego, $P(t)$ está dada por la solución del PVI:

$$P'(t) = kP(t), \text{ con } P(0) = 150 \text{ y además } P(1) = 200.$$

Puesto que $P(t) = Ce^{kt}$, se tiene:

$$\begin{aligned} P(0) &= 150 = Ce^{k \cdot 0} = C \implies C = 150 \implies P(t) = 150e^{kt}. \\ P(1) &= 200 \iff 150e^{k \cdot 1} = 200 \implies 150e^k = 200 \implies e^k = \frac{4}{3} \implies k = \ln\left(\frac{4}{3}\right) \approx 0,2877 \\ &\implies P(t) = 150e^{0,2877t}; \end{aligned}$$

que es la solución del PVI y es la cantidad de bacterias después de t horas.

2. La cantidad de bacterias después de 2 h es

$$P(2) = 150e^{(0,2877)(2)} \approx 266,6666 \implies P(2) \approx 267 \text{ bacterias.}$$

3. Para que la población se triplique:

$$P(t) = 3P_0 \implies 3P_0 = 150e^{0,2877t} \implies 3(150) = 150e^{0,2877t} \implies e^{0,2877t} = 3 \implies t = \frac{\ln(3)}{0,2877} \approx 3,8186$$

es decir que $t \approx 3$ horas, 49 minutos, 7 segundos.

Ejemplo 2.10 Cierta población de bacterias tiene una rapidez de cambio proporcional a sí misma. Si en una 1 h tuvo un crecimiento del 50 por ciento:

1. ¿Cuál es la población después de t horas?
2. ¿En cuánto tiempo se duplicará la población?
3. ¿Cuánto habrá aumentado la población en 10 h?

Solución

1. Sea $P(t)$ la población total de bacterias después de t horas. Como no se dice la población inicial, suponemos que esta es P_0 y, debido a que la población creció un 50% en 1 hora, entonces:

$$P(1) = P_0 + 0,5P_0 = 1,5P_0$$

Por lo tanto, $P(t)$ está dada por la solución del PVI:

$$P'(t) = kP(t), \text{ con } P(0) = P_0 \text{ y además } P(1) = 1,5P_0.$$

Sabemos que $P(t) = P_0e^{kt}$, entonces: $P(1) = 1,5P_0 \implies P_0e^k = 1,5P_0 \implies e^k = 1,5 \implies k = \ln(1,5) \approx 0,4055 \implies P(t) = P_0e^{0,4055t}$, que es la solución del PVI que da la población de bacterias después de t horas.

2. Para conocer cuándo se duplica la población:

$$P(t) = 2P_0 \implies P_0 e^{0,4055t} = 2P_0 \implies e^{0,4055t} = 2 \implies t = \frac{\ln 2}{0,4055} \approx 1,7094 \text{ horas.}$$

Hallamos que la población se duplicará en $t = 1$ hora, 42 minutos, 33 segundos.

3. La población después de 10 horas es

$$P(10) = P_0 e^{(0,4055)(10)} = P_0 e^{4,055} \approx 57,685 P_0.$$

Por lo tanto, en 10 h la población habrá aumentado aproximadamente 58 veces la población inicial.

Ejemplo 2.11 Si la población de cierta comunidad crece al 2% anual ¿Cuántos años deben transcurrir para que la población se duplique?

Solución. Aquí, el 2% anual mencionado es precisamente la tasa de crecimiento de población. Se tiene entonces que $k = 2\% = 0,02$. Además, por la primera observación, el tiempo para que una población se duplique está dado por:

$$t_d = \frac{\ln 2}{k}.$$

Luego,

$$t_d = \frac{\ln 2}{k} = \frac{\ln 2}{0,02} \approx 34,6574 \text{ años;}$$

es decir que $t_d = 34$ años, 240 días.

Ejercicios. Modelo de Malthus

1. La población de una comunidad aumenta con una rapidez proporcional a sí misma. Si la población inicial es de 2000 y aumenta 10 % en 5 años:
 - a) ¿Cuál será la población en t años? (Respuesta: $P(t) = 2000e^{0,01906t}$)
 - b) ¿Qué porcentaje habrá aumentado en 10 años? (Respuesta: 21 %)
 - c) ¿Cuántos años deben transcurrir para que la población sea de 20000 personas? (Respuesta: $t \approx 120$ años, 295 días)
2. La población de una comunidad aumenta con una rapidez proporcional a sí misma. Si la población se duplicó en 20 años, ¿en cuántos años se triplicará? (Respuesta: $t \approx 31$ años, 254 días)
3. La población de cierta especie de animales aumenta 5 % anual. ¿En cuánto tiempo se duplica la población? (Respuesta: $t \approx 13$ años, 315 días)
4. La población de cierta especie de animales aumenta 10 % anual. ¿En cuánto tiempo se triplica la población? (Respuesta: $t \approx 10$ años, 360 días.)
5. Experimentalmente se sabe que la población de cierta bacteria se duplica cada 30 h. ¿Cuál es la tasa de crecimiento por día? (Respuesta: $k = 55,45$ % diario)

2.4. Modelo logístico

El modelo de Malthus tiene muchas limitaciones. Por ejemplo, predice que una población crecerá exponencialmente con el tiempo, que no ocurre en la realidad. Si la especie considerada dispone de todos los medios para vivir, como espacio, aire, alimento, entonces su crecimiento será de tipo exponencial; pero si los recursos escasean, entonces habrá competencia para acceder a ellos (peleas, guerras a veces, supervivencia de los más fuertes...) y la razón de crecimiento no será la misma. Por esta razón al modelo de Malthus se le llama de crecimiento irrestricto, mientras que el modelo presentado a continuación se denomina modelo de crecimiento con restricciones.

El modelo llamado de crecimiento logístico, fue introducido por Pierre François Verhulst en 1838 y supone que la razón de crecimiento es proporcional conjuntamente tanto a la población misma como a la cantidad faltante para llegar a la máxima población sustentable. Escribiremos dicho modelo como

$$\frac{dP}{dt} = rP \left(1 - \frac{P}{K}\right) \quad (2.9)$$

En este modelo el número r se conoce como la razón de crecimiento intrínseco, y K es la capacidad sustentable que es el máximo valor que puede tener P . El valor de r depende solo de la especie considerada, mientras que K depende tanto de la especie como del ambiente en donde se desarrolla ésta y es el máximo valor posible en ese ambiente.

Advierta que, si el valor de P es muy pequeño comparado con K , entonces $1 - \frac{P}{K} \approx 1$ y la ED (2.9) es semejante a la de Malthus. Por otro lado, si P se aproxima a K entonces $1 - \frac{P}{K} \approx 0$ y esto haría que $\frac{dP}{dt} \approx 0$; en consecuencia la población $P(t)$ sería casi constante.

Resolvamos la ED. Observemos que es separable:

$$\frac{dP}{dt} = rP \left(1 - \frac{P}{K}\right) \Rightarrow \frac{dP}{P \left(1 - \frac{P}{K}\right)} = r dt \Rightarrow \int \frac{dP}{P \left(1 - \frac{P}{K}\right)} = rt + C.$$

La integral del primer miembro se resuelve mediante fracciones parciales:

$$\begin{aligned} \frac{1}{P \left(1 - \frac{P}{K}\right)} &= \frac{A}{P} + \frac{B}{1 - \frac{P}{K}} \Rightarrow A \left(1 - \frac{P}{K}\right) + BP = 1 \Rightarrow \left(B - \frac{A}{K}\right)P + A = 1 \\ \Rightarrow A &= 1 \text{ y } B - \frac{A}{K} = 0 \Rightarrow A = 1 \text{ y } B - \frac{1}{K} = 0 \Rightarrow A = 1 \text{ y } B = \frac{1}{K}. \end{aligned}$$

Luego

$$\int \frac{dP}{P \left(1 - \frac{P}{K}\right)} = \int \left[\frac{1}{P} + \frac{\frac{1}{K}}{1 - \frac{P}{K}} \right] dP = \ln P + \frac{1}{K} \int \frac{1}{1 - \frac{P}{K}} dP = \ln P - \ln |K - P|.$$

Ahora, si se toma en consideración que $P < K$, se tiene que $|K - P| = K - P$, por lo cual:

$$\ln \left(\frac{P}{K - P} \right) = rt + C \Rightarrow \frac{P}{K - P} = Ce^{rt}.$$

Antes de despejar P , usemos la condición inicial $P(0) = P_0$, para determinar C :

$$\frac{P_0}{K - P_0} = Ce^0 = C \Rightarrow \frac{P}{K - P} = \frac{P_0}{K - P_0} e^{rt}.$$

Ahora despejamos P , denotando por comodidad $\frac{P_0}{K - P_0} = C$:

$$\frac{P}{K - P} = Ce^{rt} \Rightarrow P = CKe^{rt} - PCe^{rt} \Rightarrow P(1 + Ce^{rt}) = CKe^{rt} \Rightarrow P = \frac{CKe^{rt}}{1 + Ce^{rt}}.$$

Para simplificar esta fórmula, dividimos numerador y denominador entre Ce^{rt} para obtener finalmente:

$$P(t) = \frac{K}{\frac{1}{Ce^{rt}} + 1} = \frac{K}{1 + \left(\frac{K - P_0}{P_0}\right) e^{-rt}}. \quad (2)$$

El diagrama de bloques que permite simular la ecuación diferencial logística se muestra en la figura (2.4).

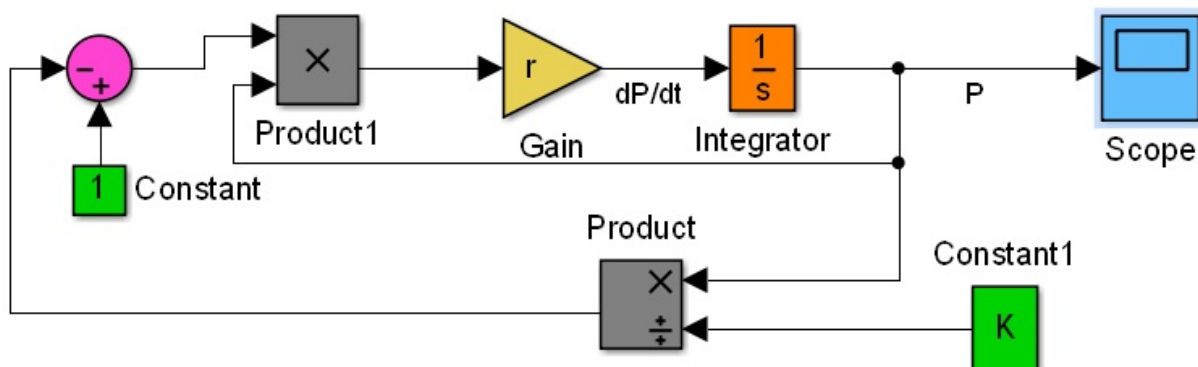


Figura 2.4 Diagrama de bloques que representa la ecuación logística $\frac{dP}{dt} = rP(1 - \frac{P}{K})$.

Los siguientes ejemplos muestran las simulaciones del crecimiento poblacional, en los diferentes ejemplos se utiliza el modelo (2.4) y solo se cambian el valor de los parámetros para las diferentes simulaciones.

Ejemplos.

1. Utilizando un modelo logístico con capacidad sustentable $K = 100 \times 10^9$, una población mundial (humana) de 5×10^9 en 1986 y una razón de crecimiento de 2% anual, hacer una predicción de la población mundial para el año 2010. ¿Cuándo será esta población de 32×10^9 ? Los datos provistos son aproximaciones de los datos observados en la realidad.

Solución. En este ejemplo tenemos $K = 100$; $P_0 = 5$ (en miles de millones de habitantes del planeta) en 1986 y $r = 0,02$. La solución de la ecuación logística $\frac{dP}{dt} = rP \left(1 - \frac{P}{K}\right)$ es, de acuerdo con la ecuación (2), como sigue:

$$P(t) = \frac{K}{1 + \left(\frac{K - P_0}{P_0}\right) e^{-rt}} = \frac{100}{1 + \left(\frac{100 - 5}{5}\right) e^{-0,02t}} = \frac{100}{1 + 19e^{-0,02t}}$$

En el año 2010 tendremos $t = 24$, entonces:

$$P(24) = \frac{100}{1 + 19e^{-(0,02)(24)}} = \frac{100}{1 + 19e^{-0,48}} \approx 7838904588 \text{ habitantes.}$$

en miles de millones de habitantes.

La gráfica 2.5 presenta el resultado de la simulación.

2. La población será de 32×10^9 en el tiempo t_1 que determinamos como sigue:

$$\begin{aligned} P(t_1) &= \frac{100}{1 + 19e^{-0,02t_1}} = 32 \implies 100 = 32 + 608e^{-0,02t_1} \implies 608e^{-0,02t_1} = 68 \\ &\implies e^{-0,02t_1} = \frac{17}{152} \implies t_1 = -\frac{\ln\left(\frac{17}{152}\right)}{0,02} \approx 109,5334 \text{ años.} \end{aligned}$$

Esto es, a mediados del año 2095. Esto, claro está, si las tendencias se mantienen; afortunadamente, la razón de crecimiento $r = 0,02$ no es una constante y, con el tiempo, en muchos países ha estado disminuyendo; entre otros aspectos gracias a la planificación familiar.

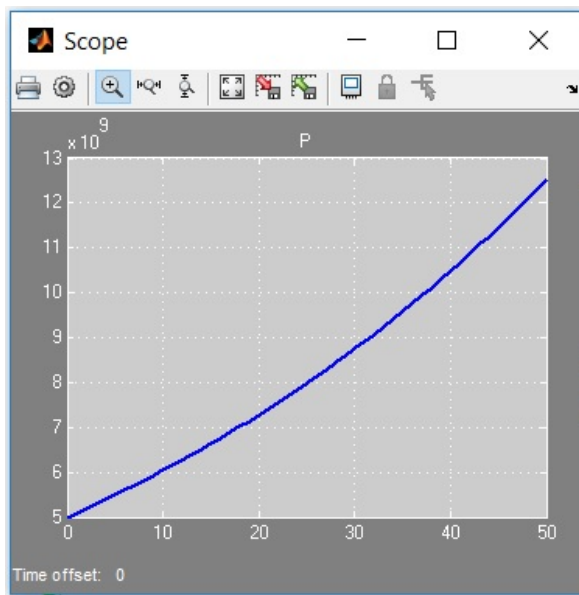


Figura 2.5 Solución de $\frac{dP}{dt} = rP \left(1 - \frac{P}{K}\right)$ con $K = 100 * 10^9$ y $P(0) = 5 * 10^9$.

3. Las reservas pesqueras del halibut (especie de gran tamaño, parecida al lenguado) en el Pacífico se modelan con la ED logística con capacidad sustentable de $80,5 \times 10^6$, medida en kg (biomasa), y razón de crecimiento intrínseco por año. Si la biomasa inicial es la cuarta parte de la capacidad sustentable, encontrar la biomasa 0,71 después de un año y el tiempo que debe pasar para que la biomasa inicial se duplique, es decir, que llegue a la mitad de la capacidad sustentable.

Solución. El PVI por resolver es

$$\frac{dP}{dt} = rP \left(1 - \frac{P}{K}\right), \text{ con } r = 0,71; \quad K = 80,5 \times 10^6 \text{ kg de biomasa, } P_0 = \frac{K}{4}.$$

Observe que ahora $P(t)$ no es el número de habitantes de la población sino la biomasa al tiempo t , es decir, la masa total de los peces de la especie halibut en el Pacífico. No repetiremos el proceso de resolución de la ED, sino que escribiremos directamente su solución:

$$P(t) = \frac{\frac{K}{4}}{1 + \left(\frac{K - P_0}{P_0}\right)e^{-rt}} = \frac{\frac{K}{4}}{1 + \left(\frac{K - \frac{K}{4}}{\frac{K}{4}}\right)e^{-rt}} = \frac{\frac{K}{4}}{1 + 3e^{-rt}} = \frac{80,5 \times 10^6}{1 + 3e^{-0,71t}}.$$

Al cabo de un año la biomasa será

$$P(1) = \frac{80,5 \times 10^6}{1 + 3e^{(-0,71) \cdot 1}} = \frac{80,5 \times 10^6}{1 + 3e^{-0,71}} = 32526138,39 \text{ kg}.$$

El tiempo necesario para duplicar la biomasa inicial se determina de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} P(t_d) = \frac{K}{2} &\iff \frac{K}{1 + 3e^{-0,71t_d}} = \frac{K}{2} \implies \frac{1}{1 + 3e^{-0,71t_d}} = \frac{1}{2} \implies 1 + 3e^{-0,71t_d} = 2 \implies e^{-0,71t_d} = \frac{1}{3} \\ &\implies -0,71t_d = \ln\left(\frac{1}{3}\right) \implies t_d = \frac{\ln 3}{0,71} \approx 1,54734 \text{ años,} \end{aligned}$$

o sea, 1 año, 6 meses y 17 días aproximadamente.

Observaciones. Finalizamos esta sección con algunas observaciones sobre la solución de la ecuación logística. Primero hay que subrayar que en las situaciones de interés se tiene $P_0 < K$, pues no es muy realista suponer que la población inicial sea mayor que la capacidad sustentable. En el caso extremo $P_0 > K$, se tiene que

$$\frac{dP}{dt} = rP \left(1 - \frac{P}{K}\right)$$

es negativa, es decir, la población decrece hasta llegar (asintóticamente), según el modelo, a K .

En la situación más común en que $P_0 < K$, la derivada $\frac{dP}{dt} = rP \left(1 - \frac{P}{K}\right)$ es positiva, o sea que, la función $P(t)$ será siempre creciente y tenderá asintóticamente hacia K cuando $t \rightarrow \infty$:

La forma típica de la curva solución, llamada curva logística, es la de una letra S alargada, como se ilustra en la figura de arriba. Es interesante observar que hay un cambio en la curvatura de $P(t)$, que es justamente un punto de inflexión. Demostraremos a continuación que la inflexión ocurre precisamente cuando $P(t) = \frac{K}{2}$.

Para ello, solo tenemos que encontrar la segunda derivada e igualar a cero:

$$\begin{aligned}\frac{d^2P}{dt^2} &= \frac{d}{dt} \left[rP \left(1 - \frac{P}{K}\right) \right] = rP' \left(1 - \frac{P}{K}\right) - \frac{r}{K} P' P = rP' - rP' \frac{P}{K} - \frac{r}{K} P' P \\ &= rP' - 2rP' \frac{P}{K} = rP' \left(1 - \frac{2P}{K}\right). \\ \frac{d^2P}{dt^2} = 0 &\implies rP' \left(1 - \frac{2P}{K}\right) = 0 \implies rP' = 0 \text{ o bien } 1 - \frac{2P}{K} = 0;\end{aligned}$$

pero $rP' = 0$ no puede ser, pues ya hemos visto que $P' = \frac{dP}{dt} > 0$ siempre, así que debe darse la segunda opción: $1 - \frac{2P}{K} = 0$, de donde se sigue que $P = \frac{K}{2}$. El tiempo t_1 en que ocurre el punto de inflexión dependerá de los parámetros P_0 y r , pero la coordenada vertical es siempre la misma $\frac{K}{2}$.

Se puede comprobar también que, en el punto de inflexión, la razón de crecimiento $\frac{dP}{dt}$ es máxima (ver los ejercicios).

Los modelos presentados y discutidos en esta sección son los que han demostrado ser de mayor utilidad por dar predicciones con una aproximación bastante razonable en la práctica. Sin embargo es pertinente aclarar que las predicciones obtenidas con ellos pueden contener errores por no tomar en cuenta todas las variables que afectan al proceso. Así sucedió con Malthus, quien, con el modelo de crecimiento exponencial, predijo en 1798 una catástrofe que en realidad nunca sucedió, porque no tuvo en cuenta los adelantos en la tecnología agropecuaria y alimenticia que han permitido a la población humana seguir viviendo, sin problemas, casi dos siglos más de lo que predijo.

Ejercicios. Modelo logístico.

- Supongamos que una población satisface a un modelo logístico con $K = 500$, que la población inicial es 100 y que a los 10 años llegó a 200. Determine la razón de crecimiento intrínseco r . (Respuesta: $r = 0,09808$.)
- La población mundial en 1939 era aproximadamente $2,3 \times 10^9$ habitantes y, en 2009, se estimó en $6,7 \times 10^9$ habitantes. Algunos especialistas consideran que la capacidad sustentable del planeta es de 11×10^9 habitantes, en condiciones de bienestar (es decir, sin desnutrición ni padecimientos por falta de recursos). Considere $t = 0$ en 1939, $P(0) = 2,3 \times 10^9$ y una capacidad sustentable de 11×10^9 . Encuentre una fórmula para $P(t)$ con $t \geq 0$, determine P en el año 2020 y el tiempo t_1 en el que habrá 10×10^9 habitantes.
 - Suponiendo que la población crece a una razón de cambio proporcional a la diferencia entre la población límite máxima L y la población al tiempo t .
 - Suponiendo un crecimiento logístico de la población.
(Respuesta: a) $P(t) = 11 - 8,7e^{-0,01t} \times 10^9$, $P(81) = 7,15 \times 10^9$, $t_1 \approx 215$ años, es decir, en 2154;
- Compruebe que, para la población que satisface el modelo logístico, la máxima razón de crecimiento de la población es $\frac{rK}{4}$, y se alcanza cuando el tamaño de la población es $\frac{K}{2}$. (Respuesta: En $P = \frac{K}{2}$ hay máximo con valor $\frac{rK}{4}$.)

Autoevaluación (Taller en grupo)

Desarrolle el diagrama de bloques que permita encontrar la simulación de los siguientes problemas, de diferentes valores para r ; P_0 y K .

1. Para una población que cumple el modelo logístico con r ; P_0 y K dados, encuentre el tiempo t_1 para el cual $P(t)$ tiene un punto de inflexión.

(Respuesta: $t_1 = \frac{\ln(K - P_0)}{r} - \frac{\ln P_0}{r}$).

2. Si se sacan o cosechan h animales por unidad de tiempo (h constante), el modelo demográfico $P(t)$ de los animales en cualquier momento t es

$$\frac{dP}{dt} = P(a - bP) - h, \quad P(0) = P_0,$$

en donde a , b , h y P_0 son constantes positivas.

- a) Desarrolle un diagrama de bloques en **Simulink** que simule el comportamiento demográfico de $P(t)$ con $a = 5$, $b = 1$ y $h = 4$.
- b) Use el programa para determinar el comportamiento a largo plazo de la población en la parte
 - a) cuando $P_0 > 4$, $1 < P_0 < 4$ y $0 < P_0 < 1$.

2.5. Decaimiento radioactivo

Si observamos cierta cantidad inicial de sustancia o material radioactivo, al paso del tiempo se puede verificar un cambio en la cantidad de dicho material; la cantidad M del material es una función del tiempo t , esto es $M = M(t)$. Aún más, dadas las características de los materiales radioactivos, al paso del tiempo ocurre una desintegración o decaimiento del material. Esto no quiere decir que el material desaparezca, sino que la configuración interna de sus átomos cambia y dejan de ser radioactivos.

Experimentalmente se ha llegado al conocimiento de que, en cualquier tiempo $t \geq 0$, la rapidez de cambio de la cantidad $M(t)$ de material radioactivo es directamente proporcional a la cantidad de material presente.

Simbólicamente esto se expresa así:

$$\frac{d}{dt}M(t) \propto M(t),$$

donde $\frac{d}{dt}M(t)$ es la rapidez de cambio de $M(t)$ y el símbolo $\propto$ denota la proporcionalidad existente entre la cantidad presente $M(t)$ del material radioactivo y su rapidez de cambio.

Se afirma entonces que

$$\frac{d}{dt}M(t) = k M(t), \quad (1)$$

donde k es la llamada constante de proporcionalidad. Debido a la desintegración, la cantidad $M(t)$ de material radioactivo va disminuyendo (decreciendo) al paso del tiempo t , por lo tanto se tiene que $\frac{d}{dt}M(t) < 0$, lo que nos permite concluir que $k < 0$ ya que $M(t) \geq 0$.

Esta ecuación diferencial (1) representa el modelo matemático por resolver y es de variables separables. En efecto:

$$\frac{dM}{dt} = k M \implies \frac{dM}{M} = k dt.$$

Integrando se tiene:

$$\frac{dM}{M} = k dt \implies \int \frac{dM}{M} = kt + C_1 \implies \ln M = kt + C_1 \implies M = Ce^{kt}.$$

Entonces la solución general de la ecuación diferencial (1) es $M(t) = Ce^{kt}$.

Es común conocer la cantidad (inicial) de material existente en $t = 0$, lo que se expresa por $M(0) = M_0$.

Con esto podemos calcular la constante C :

$$M(0) = M_0 = Ce^{k \cdot 0} = C \implies C = M_0.$$

Entonces se tiene:

$$M(t) = M_0 e^{kt}.$$

De esta última expresión observemos que se puede calcular k si se conoce la cantidad de material existente en un tiempo $t_1 > 0$, digamos $M(t_1) = M_1 < M_0$:

$$M(t_1) = M_1 = M_0 e^{kt_1} \implies e^{kt_1} = \frac{M_1}{M_0} \implies t_1 = \frac{1}{k} \ln \left(\frac{M_1}{M_0} \right) \implies t_1 = \frac{\ln(M_1) - \ln(M_0)}{k}.$$

Así concluimos que

$$k = \frac{\ln(M_1) - \ln(M_0)}{t_1}.$$

Observaciones:

1. Un caso particular ocurre cuando $M(t_1) = \frac{M_0}{2}$. Esto es, se conoce el tiempo que transcurre para que la cantidad de material inicial decaiga a la mitad. Este tiempo se conoce como la *vida media* del material radioactivo. Denotaremos con t_m a este tiempo. En este caso:

$$M(t_m) = \frac{M_0}{2} \implies M_0 e^{kt_m} = \frac{M_0}{2} \implies e^{kt_m} = \frac{1}{2} \implies kt_m = \ln \left(\frac{1}{2} \right) \implies kt_m = -\ln(2).$$

Entonces $kt_m = -\ln(2)$, de donde podemos despejar por igual:

$$k = -\frac{\ln(2)}{t_m} \quad \text{y} \quad t_m = -\frac{\ln(2)}{k} \quad (2)$$

Además, en vista de lo anterior podemos afirmar que la vida media de un material no depende de la cantidad inicial del mismo.

2. Si se proporcionan $M(t_1) = M_1$ y $M(t_2) = M_2$ para dos tiempos $t_1 < t_2$, obtenemos los siguientes resultados:

$$\begin{cases} M(t_1) = M_1 = Ce^{kt_1} \\ M(t_2) = M_2 = Ce^{kt_2} \end{cases} \quad (3)$$

Tenemos un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, C y k . Para resolverlo podemos dividir la segunda ecuación entre la primera y así obtenemos:

$$\frac{M_2}{M_1} = \frac{Ce^{kt_2}}{Ce^{kt_1}} = e^{k(t_2-t_1)} \implies e^{k(t_2-t_1)} = \frac{M_2}{M_1} \implies k(t_2-t_1) = \ln\left(\frac{M_2}{M_1}\right) \implies k = \frac{\ln(M_2)-\ln(M_1)}{t_2-t_1}.$$

Es decir,

$$k = \frac{\ln(M_2) - \ln(M_1)}{t_2 - t_1} \quad (4)$$

Además, tenemos también de (3):

$$M_1 = Ce^{kt_1} \implies C = M_1 e^{-kt_1}.$$

Por lo tanto, al sustituir en $M(t) = Ce^{kt}$:

$$M(t) = M_1 e^{-kt_1} e^{kt} \implies M(t) = M_1 e^{k(t-t_1)};$$

en donde k es el valor obtenido en (4).

Ejemplos.

1. Se sabe que un material radioactivo se desintegra con una rapidez proporcional a la cantidad presente en cualquier instante. Si inicialmente hay 100 mg de material y, después de dos años, se observa que el 5 % de la masa original se desintegró, determinar:

- Una expresión para la masa al momento t .
- El tiempo necesario para que se desintegre el 10 % de la masa original.

Solución. Si $M(t)$ es la cantidad presente (en miligramos) de material radioactivo al cabo de t años, entonces $M(t)$ está dada por la solución del PVI

$$M'(t) = kM(t); \text{ con } M(0) = 100 \text{ y además } M(2) = 95.$$

- Tenemos que $M_0 = 100$ mg. Por otro lado, considerando que $M(t) = M_0 e^{kt} = 100e^{kt}$ se tiene, para $t = 2$:

$$M(2) = 100 - 5 = 95 = 100e^{2k} \implies e^{2k} = 0,95 \implies 2k = \ln(0,95) \implies k = \frac{\ln(0,95)}{2} = -0,02564.$$

Entonces la expresión solicitada es

$$M(t) = 100e^{-0,02564t}$$

- Cuando se desintegra el 10 % de la masa quedan 90 mg de la misma, entonces:

$$90 = 100e^{-0,02564t} \implies e^{-0,02564t} = 0,9 \implies t = -\frac{\ln(0,9)}{0,02564} = 4,1076 \text{ años,}$$

representa el tiempo para que se desintegre el 10 % de la masa original.

2. Un material radioactivo se desintegra dos tercios en 1000 años. Determinar su vida media.

Solución. Suponemos que se cumple con el modelo de desintegración de esta sección y por lo tanto $M(t) = M_0 e^{kt}$.

Si pierde dos tercios de material en 1000 años, entonces:

$$M(1000) = \frac{M_0}{3} \iff M_0 e^{1000k} = \frac{M_0}{3} \implies k = \frac{1}{1000} \ln\left(\frac{1}{3}\right) = -\frac{\ln 3}{1000} = -0,0010986.$$

Podemos calcular ya la vida media, usando (3.2):

$$t_m = -\frac{\ln 2}{k} \implies t_m = -\frac{\ln 2}{-0,0010986} = 630,92 \text{ años}.$$

3. Se ha detectado que el 0.5 % de una sustancia radioactiva desaparece en 12 años.

a) ¿Qué porcentaje desaparecerá en 1000 años?

b) ¿Cuál es la vida media de dicha sustancia?

Solución. La cantidad de sustancia al cabo de t años está dada por $M(t) = M_0 e^{kt}$, donde M_0 es la cantidad inicial de sustancia. Además:

$$M(12) = 0,995M_0 \iff M_0 e^{12k} = 0,995M_0 \implies e^{12k} = 0,995 \implies k = \frac{\ln(0,995)}{12} = -0,0004177.$$

a) Sea p el porcentaje que queda de la sustancia radioactiva después de 1000 años. Entonces:

$$M(1000) = pM_0 \iff M_0 e^{1000k} = pM_0 \implies e^{1000k} = p \implies p = e^{1000(-0,0004177)} = 0,65856.$$

Este resultado indica que a los 1000 años quedará el 65,856 % de la sustancia radioactiva original, es decir, desaparecerá 34,144 % de dicha sustancia.

b) Para hallar la vida media usamos el valor de k previamente calculado:

$$t_m = -\frac{\ln 2}{k} \implies t_m = -\frac{\ln 2}{-0,0004177} \implies t_m = 1659,44 \text{ años} \approx 1660 \text{ años}.$$

En el siguiente ejemplo se muestra una aplicación importante de las ED en arqueología.

El elemento carbono, presente en todos los compuestos orgánicos, tiene un isótopo radioactivo, llamado carbono 14 (^{14}C). El porcentaje de ^{14}C con respecto al carbono en los organismos vivos permanece constante y, cuando este muere, el ^{14}C decae en la forma que hemos visto. Así que, si sabemos cuánto ^{14}C ha perdido una parte de un organismo, podremos encontrar el tiempo transcurrido a partir de su muerte. Para ello solo basta saber que el ^{14}C radiactivo tiene una vida media aproximada de 5600 años.

4. Se encontraron huesos fósiles de un animal. Se analizaron y se detectó que cada hueso contenía una centésima parte del ^{14}C radioactivo. Determinar la antigüedad aproximada de los huesos encontrados.

Solución. Supongamos que $M(t)$ es la cantidad presente de ^{14}C en cada hueso al cabo de t años y que M_0 es la cantidad original (inicial) de dicha sustancia radioactiva en cada hueso. $M(t)$ está determinada por la solución del PVI:

$$M'(t) = kM(t), \text{ con } M(0) = M_0 \text{ y además } M(5600) = \frac{M_0}{2}.$$

La solución general de la ecuación diferencial es $M(t) = Ce^{kt}$, donde $C = M_0$. Ahora,

$$M(5600) = \frac{M_0}{2} \iff M_0 e^{5600k} = \frac{M_0}{2} \implies e^{5600k} = \frac{1}{2} \implies k = \frac{1}{5600} \ln\left(\frac{1}{2}\right) \implies k = -0,000123776.$$

Por lo que

$$k = -(1,23776) \times 10^{-4}.$$

En consecuencia

$$M(t) = M_0 e^{-(1,23776) \times 10^{-4} t}$$

Ahora bien, considerando que cada hueso contenía una centésima parte del ^{14}C radioactivo original, se tiene que

$$M(t) = \frac{1}{100}M_0 \implies M_0 e^{-(1,23776) \times 10^{-4}t} = \frac{1}{100}M_0 \implies e^{-(1,23776) \times 10^{-4}t} = \frac{1}{100} \implies$$

$$(-1,23776) \times 10^{-4}t = \ln\left(\frac{1}{100}\right) \implies t = \frac{-\ln(100)}{-(1,23776) \times 10^{-4}} \implies t = \frac{10^4 \ln(100)}{(1,23776)} = 37205,6795.$$

Por lo tanto, la antigüedad (edad) aproximada de los huesos es $t = 37206$ años.

Ejercicios

En los ejercicios siguientes suponga que la rapidez de de crecimiento es directamente proporcional a la cantidad presente de sustancia radioactiva.

- Si el 5 % de una sustancia radioactiva se descompone en 50 años:
 - ¿Qué porcentaje habrá al final de 500 años?
 - ¿Y después de 1000 años?
 - ¿Cuál es la vida media de esta sustancia?
 (Respuestas: a) 59,9 %; b) 35,8 %; c) 675 años, 212 días)
- Si la vida media de una sustancia radiactiva es de 1800 años:
 - ¿Qué porcentaje estará presente al final de 100 años?
 - ¿En cuántos años quedará el 10 % de la sustancia?
 (Respuestas: a) 96,22 %; b) 5980 años, 270 días.)
- Un año después de la producción de cierta sustancia radioactiva, se tenían 100 gramos de esta y dos años después 75 gramos; ¿cuánto se produjo inicialmente?; ¿cuál es la vida media de la sustancia? (Respuesta: a) $M_0 = 133,333$ g; b) 2 años, 150 días)
- Una muestra extraída de un cráneo antiguo contenía solamente una sexta parte del ^{14}C original. ¿Cuál es la antigüedad del cráneo? (Respuesta: 14 475 años)
- Calcular la vida media de una sustancia radioactiva que en 10 años decae un 25 %. (Respuesta: $t_m \approx 24$ años, 34 días)
- Un análisis de restos fósiles de un animal demostró que éstos contenían solo el 6,24 % del ^{14}C original. Determinar la antigüedad aproximada de la muerte del animal. (Respuesta: 22412 años, 126 días.)
- Los neutrones en una pila atómica crecen a una razón proporcional al número de neutrones presente en cualquier instante (debido a la fisión nuclear). Si inicialmente hay N_0 neutrones y luego se tienen N_1 y N_2 neutrones presentes en los instantes t_1 y t_2 , respectivamente, demostrar que:

$$\left(\frac{N_2}{N_1}\right)^{t_1} = \left(\frac{N_1}{N_0}\right)^{t_2}.$$

- El uranio se desintegra a una rapidez proporcional a la cantidad presente en cualquier instante. Si M_1 y M_2 gramos están presentes en los instantes t_1 y t_2 , respectivamente, mostrar que la vida media del uranio es

$$t_m = \frac{(t_2 - t_1) \ln 2}{\ln(M_1) - \ln(M_2)}.$$

2.6. Mezclas

Si disolvemos 500 g de azúcar en 20 litros de agua, obtenemos una solución dulce con una concentración $C = \frac{500}{20} = 25$ g/litro de azúcar (se lee 25 gramos por litro y significa 25 gramos de azúcar por cada litro de solución).

Cuando disolvemos 10 lb de sal en 50 gal de agua, obtenemos una solución salina o salmuera con una concentración $C = \frac{10}{50} = 0,2$ lb/gal de sal (léase 0,2 libras por galón).

En general, si disolvemos Q kg (o cualquier unidad de masa) de un soluto en V litros (o alguna otra unidad de volumen) de un solvente, obtenemos una solución con una concentración $C = \frac{Q}{V}$ kg/litro del soluto (léido C kilogramos por litro y entendido como C kilogramos de soluto por cada litro de solución).

Ahora supongamos que inicialmente (en $t = 0$) tenemos en un tanque una cantidad V_0 de solución donde hay disuelta una cantidad Q_0 de un soluto. Supongamos también que, a partir de $t = 0$, se deja entrar otra solución al tanque con una rapidez R_e (flujo de entrada) y con una concentración C_e (concentración de entrada) del mismo soluto y que, al mismo tiempo, se deja salir del tanque la nueva solución (considerada uniforme por mezclado) con una rapidez R_s (flujo de salida) y una concentración C_s (concentración de salida) del mismo soluto.

Observamos lo siguiente:

1. Si $R_e = R_s$, entonces la cantidad V_0 de solución se mantiene constante al paso del tiempo t .
2. Si $R_e \neq R_s$, entonces la cantidad V de solución será función del tiempo t ; es decir, $V = V(t)$. Aún más, si $R_e > R_s$, entonces $V(t) > V_0$ (además es creciente); mientras que, si $R_e < R_s$, entonces $V(t) < V_0$ (además es decreciente).
3. En general, la cantidad Q de soluto en el tanque será función del tiempo t ; es decir, $Q = Q(t)$.
4. Igualmente, la concentración C del soluto en el tanque será función del tiempo t ; y variará según que $R_e = R_s$ o que $R_e \neq R_s$, esto es,

$$C(t) = \frac{Q(t)}{V_0} \text{ o bien } \frac{Q(t)}{V(t)}.$$

5. Un problema que es de interés en esta clase de procesos consiste en determinar la cantidad $Q(t)$ de soluto en el tanque en cualquier instante $t \geq 0$.

Para resolver este problema procedemos como sigue:

Consideremos primero la rapidez con que cambia la cantidad de soluto $Q(t)$ en el tanque, la cual está dada por la rapidez con que entra el soluto menos la rapidez con la que sale. Esto es,

$$\frac{dQ(t)}{dt} = (\text{rapidez con que entra el soluto}) - (\text{rapidez con que sale el soluto})$$

Si tomamos en cuenta que:

la rapidez con que entra el soluto es $R_e C_e$;

la rapidez con que sale el soluto es $R_s C_s = R_s C(t)$.

El modelo de este proceso queda como el PVI:

$$\frac{dQ(t)}{dt} = R_e C_e - R_s C(t), \text{ con } Q(0) = Q_0. \quad (2.10)$$

El método de solución de este PVI dependerá de las condiciones del problema.

Ejemplos

1. En un tanque que contiene 1000 litros de agua, inicialmente se disuelven 5 kg de sal. Luego se bombea salmuera al tanque a razón de 20 litros/min y la solución uniformemente mezclada se bombea hacia afuera del tanque a la misma razón. Considerando que la concentración de la solución que entra es de 0,01 kg/litro, determinar:

a) La cantidad de sal que hay en el tanque en cualquier instante $t \geq 0$.

- b) La cantidad de sal en el tanque después de 30 min.
- c) La cantidad de sal en el tanque después de mucho tiempo.
- d) El tiempo que debe transcurrir para que haya 8 kg de sal en el tanque.

Solución. Sea $Q(t)$ la cantidad (en kg) de sal en el tanque después de t min. Como inicialmente se tienen 5 kg de sal, entonces $Q(0) = 5$.

La rapidez de cambio de la cantidad $Q(t)$ de sal en el tanque en el instante t es

$$\frac{dQ(t)}{dt} = (\text{rapidez con que entra la sal}) - (\text{rapidez con que sale la sal})$$

¿Con qué rapidez entra la sal al tanque?

Ya que la solución entra con una rapidez $R_e = 20$ litros/min y con una concentración $C_e = 0,01$ kg/litro, entonces la rapidez con que entra la sal al tanque es

$$R_e C_e = (20 \text{ litros/min}) (0,01 \text{ kg/litro}) = 0,2 \text{ kg/min.}$$

¿Con qué rapidez sale la sal del tanque?

La rapidez con que sale la solución del tanque es $R_s = 20$ litros/min. Sin embargo, la concentración de sal a la salida se debe hallar a partir de estas consideraciones:

- Ya que entra solución a razón de 20 litros/min y sale solución a la misma razón, es claro que el volumen V de solución en el tanque es constante: $V = \text{volumen inicial} = 1000$ litros.
- Después de t minutos hay $Q(t)$ kilogramos de sal disueltos en 1000 litros de solución, por lo que la concentración de sal en la solución que sale es $C_s = \frac{Q(t)}{V} = \frac{Q(t)}{1000} \frac{\text{kg}}{\text{litro}}$.

Entonces la rapidez con que sale la sal del tanque es

$$R_s C_s = (20 \text{ litros/min}) \left(\frac{Q(t)}{1000} \frac{\text{kg}}{\text{litro}} \right) = \frac{Q(t)}{50} \frac{\text{kg}}{\text{min}}.$$

Por lo tanto, la rapidez de cambio de la cantidad $Q(t)$ de sal en el tanque, después de t minutos es

$$\frac{d}{dt} Q(t) = R_e C_e - R_s C(t) = 0,2 - \frac{Q(t)}{50} \implies Q'(t) + \frac{Q(t)}{50} = 0,2.$$

La cantidad de sal en el tanque $Q(t)$ está dada por la solución del PVI:

$$Q'(t) + \frac{Q(t)}{50} = 0,2, \text{ con } Q(0) = 5.$$

- a) Resolvemos la ecuación diferencial: $Q'(t) + \frac{Q(t)}{50} = 0,2$, la cual es una ED lineal no homogénea y tiene por factor integrante a $e^{t/50}$, por lo que

$$\begin{aligned} e^{\frac{t}{50}} \left(Q'(t) + \frac{Q(t)}{50} \right) &= 0,2 e^{\frac{t}{50}} \implies \frac{d}{dt} \left(e^{\frac{t}{50}} Q(t) \right) = 0,2 e^{\frac{t}{50}} \implies e^{\frac{t}{50}} Q(t) = C + 0,2 \int e^{\frac{t}{50}} dt \\ &\implies e^{\frac{t}{50}} Q(t) = C + (0,2)(50) e^{\frac{t}{50}} \implies e^{\frac{t}{50}} Q(t) = C + 10 e^{\frac{t}{50}} \\ &\implies Q(t) = C e^{-\frac{t}{50}} + 10 \implies Q(t) = 10 + C e^{-\frac{t}{50}}. \end{aligned}$$

Ahora bien, considerando la condición inicial,

$$Q(0) = 5 \implies 10 + C e^0 = 5 \implies C = -5,$$

encontramos que

$$Q(t) = 10 - 5 e^{-\frac{t}{50}},$$

es la cantidad de sal (en kg) que hay en el tanque después de t minutos.

b) La cantidad de sal que hay después de 30 min:

$$Q(30) = 10 - 5e^{-\frac{30}{50}} = 10 - 5e^{-0.6} \approx 7,25594182 \Rightarrow Q(30) \approx 7,256 \text{ kg.}$$

c) La cantidad de sal que hay después de mucho tiempo la podemos denotar y calcular como sigue:

$$Q_{\text{lím}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} Q(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(10 - 5e^{-\frac{t}{50}}\right) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(10 - \frac{5}{e^{t/50}}\right) = 10 \Rightarrow Q_{\text{lím}} = 10 \text{ kg.}$$

d) ¿Qué tiempo debe transcurrir para que haya 8 kg de sal en el tanque?

$$Q(t) = 8 \Leftrightarrow 10 - 5e^{-\frac{t}{50}} = 8 \Rightarrow e^{-\frac{t}{50}} = \frac{2}{5} \Rightarrow t = -50 \ln(0,4) \approx 45,81453659 \text{ min.}$$

Es decir, $t \approx 45$ minutos, 49 segundos.

La figura 2.8 muestra el diagrama de bloques que permite simular la concentración de sal en el tanque con respecto al tiempo

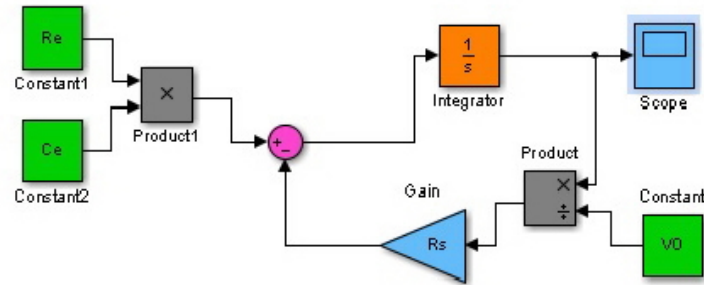


Figura 2.8 Diagrama de bloques de la ecuación $\frac{dQ(t)}{dt} = R_e C_e - R_s \frac{Q(t)}{V_0}$

La figura (2.9) comprueba los resultados teóricos, se puede comprobar que la concentración está tendiendo a 10 kg y que en aproximadamente en $t = 45.8$ min hay 8 kg de sal.

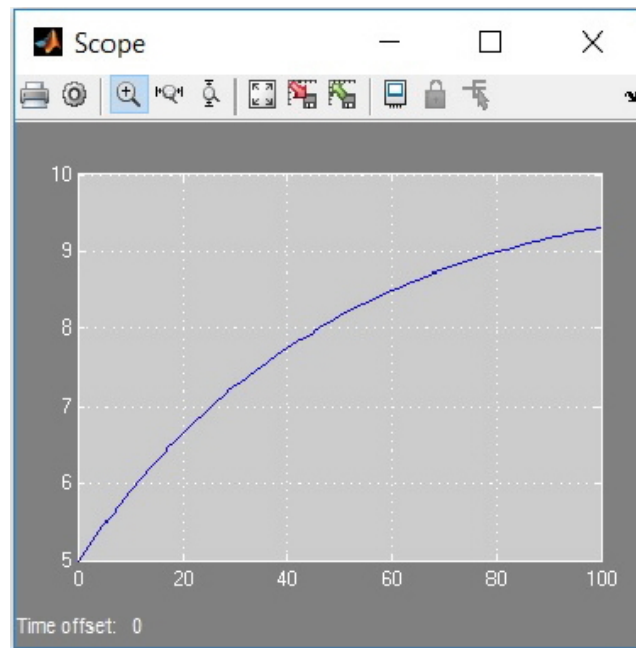


Figura 2.9 Concentración de sal en el tanque de 1000 lt.

1. Un tanque que tiene capacidad para 2000 litros, contiene inicialmente 1000 litros de agua con 8 kg de sal disuelta. Se bombea salmuera al tanque a razón de 20 litros/min y la solución uniformemente mezclada se bombea hacia afuera a razón de 15 litros/min. Considerando que la concentración de la solución que entra es de 0,01 kg/litro, determinar:

- La cantidad de sal que hay en el tanque después de t minutos.
- La cantidad de sal que hay en el tanque después de 1 h.
- La concentración de sal en el tanque cuando éste se llena.

Solución.

- a) Sea $Q(t)$ la cantidad (en kg) de sal en el tanque después de t minutos.

Como inicialmente se tienen 8 kg de sal, entonces $Q(0) = 8$.

La rapidez de cambio de la cantidad $Q(t)$ de sal en el tanque en el instante t es

$$\frac{dQ(t)}{dt} = (\text{rapidez con que entra la sal}) - (\text{rapidez con que sale la sal})$$

¿Con qué rapidez entra la sal al tanque?

Ya que la solución entra con una rapidez $R_e = 20$ litros/min y con una concentración $C_e = 0,01 \text{ kg/litro}$, entonces la rapidez con que entra la sal al tanque es

$$R_e C_e = (20 \text{ litros/min}) (0,01 \text{ kg/litro}) = 0,2 \text{ kg/min.}$$

La rapidez con que sale la solución del tanque es $R_s = 15$ litros/min. Pero ¿con qué concentración de sal?

Ya que entra solución a razón de 20 litros/min y sale solución a razón de 15 litros/min, entonces quedan en el tanque 5 litros de solución en cada minuto que transcurre. Después de t minutos habrán quedado almacenados en el tanque $5t$ litros de solución, los cuales se sumarán a los 1000 litros de solución iniciales. Es decir, después de t minutos habrá en el tanque $(1000 + 5t)$ litros de solución en los que estarán disueltos $Q(t)$ kg de sal, por lo cual la concentración de sal en la solución que sale es

$$C_s = \frac{Q(t)}{1000 + 5t} \text{ kg/litro.}$$

Entonces la rapidez con que sale la sal del tanque es

$$R_s C_s = (15 \text{ litros/min}) \left(\frac{Q(t)}{1000 + 5t} \text{ kg/litro} \right) = \frac{15Q(t)}{1000 + 5t} \text{ kg/min.}$$

Por lo tanto, la rapidez de cambio de la cantidad $Q(t)$ de sal en el tanque, después de t minutos es

$$\frac{d}{dt} Q(t) = R_e C_e - R_s C_s = 0,2 - \frac{15Q(t)}{1000 + 5t},$$

o sea,

$$Q'(t) + \frac{15}{1000 + 5t} Q(t) = 0,2.$$

Luego, la cantidad $Q(t)$ está dada por la solución del PVI:

$$Q'(t) + \frac{3}{200 + t} Q(t) = 0,2; \quad \text{con } Q(0) = 8,$$

la cual es una ED lineal no homogénea y tiene por factor integrante lo siguiente:

$$e^{\int \frac{3}{200+t} dt} = e^{3 \int \frac{1}{200+t} dt} = e^{3 \ln(200+t)} = e^{\ln(200+t)^3} = (200+t)^3,$$

por lo que:

$$\begin{aligned} \left(Q'(t) + \frac{3}{200+t} Q(t) \right) (200+t)^3 &= (0,2) (200+t)^3 \\ \implies \frac{d}{dt} \left[Q(t) (200+t)^3 \right] &= (0,2) (200+t)^3 \\ \implies Q(t) (200+t)^3 &= (0,2) \int (200+t)^3 dt \\ \implies Q(t) (200+t)^3 &= \frac{(0,2)}{4} (200+t)^4 + C \\ \implies Q(t) &= (0,05) (200+t) + \frac{C}{(200+t)^3}. \end{aligned}$$

Ahora bien, considerando la condición inicial,

$$Q(0) = 8 \implies (0,05) (200+0) + \frac{C}{(200+0)^3} = 8 \implies 10 + \frac{C}{(200)^3} = 8 \implies C = -2(200)^3,$$

por lo que,

$$Q(t) = (0,05) (200+t) - \frac{2(200)^3}{(200+t)^3} \implies Q(t) = (0,05) (200+t) - 2 \left(\frac{200}{200+t} \right)^3,$$

es la cantidad (en kg) de sal que hay en el tanque después de t minutos.

b) La cantidad de sal que hay en el tanque después de una hora (60 min) es

$$\begin{aligned} Q(60) &= (0,05) (200+60) - 2 \left(\frac{200}{200+60} \right)^3 \\ &= (0,05) (260) - 2 \left(\frac{200}{260} \right)^3 = 13 - 2 \left(\frac{10}{13} \right)^3 \\ &= 13 - 0,91 = 12,09; \end{aligned}$$

luego $Q(60) = 12,09 \text{ kg}$.

c) ¿Cuál es la concentración de sal en el tanque cuando este se llena?

Primero veamos que el tanque se llena cuando el volumen variable $V(t) = (1000 + 5t)$ se iguala con la capacidad del tanque de 2000 litros. Esto sucede cuando

$$V(t) = 2000 \implies 1000 + 5t = 2000 \implies t = 200.$$

Es decir, el tanque se llena cuando han transcurrido $t = 200$ minutos.

La cantidad de sal que hay en el tanque en dicho instante es

$$\begin{aligned} Q(200) &= (0,05) (200+200) - 2 \left(\frac{200}{200+200} \right)^3 = (0,05) (400) - 2 \left(\frac{1}{2} \right)^3 \\ &= 20 - \frac{1}{4} = \frac{79}{4} = 19,75 \text{ kg}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, la concentración de sal en el tanque en este instante es

$$C(200) = \frac{Q(200)}{2000} \frac{\text{kg}}{\text{litro}} = \frac{19,75}{2000} \frac{\text{kg}}{\text{litro}} \implies C(200) = 0,009875 \text{ kg/litro} \implies C(200) \approx 0,01 \text{ kg/litro}$$

La figura 2.10 muestra el diagrama de bloques, observe que se utiliza el bloque **clock**, bloque que simula el tiempo t que transcurre al iniciar nuestra simulación.

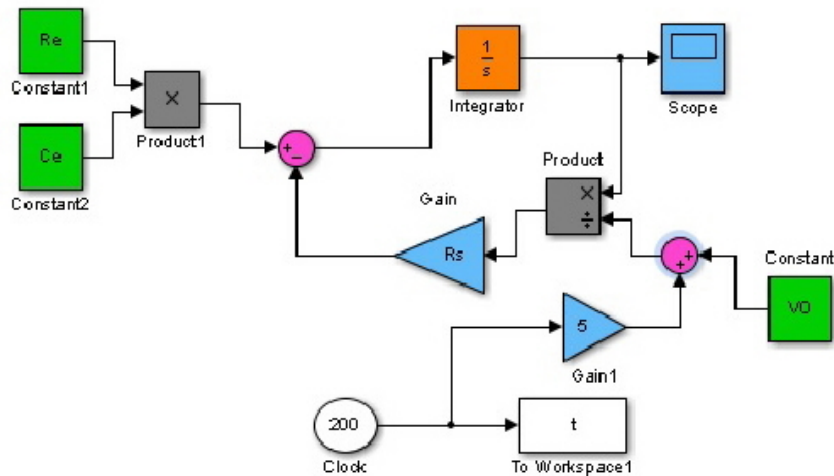


Figura 2.10 Diagrama de bloques para $Q'(t) + \frac{15}{1000+5t}Q(t) = 0, 2$.

Efectivamente, los resultados teóricos concuerdan con los resultados simulados que se muestran en la figura 2.11.

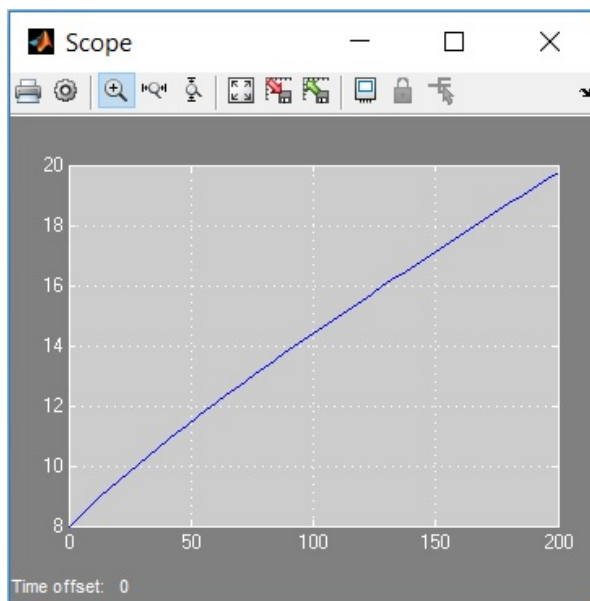


Figura 2.11 Concentración de sal en el tanque.

2. En un tanque que contiene 500 galones de agua, inicialmente se disuelven 10 libras de sal. Luego se bombea salmuera al tanque a razón de 4 gal/min y la solución uniformemente mezclada se bombea hacia afuera del tanque a razón de 5 gal/min. Considerando que la solución que entra tiene sal con una concentración de 0,1 lb/gal, determinar:

- La cantidad de sal que hay en el tanque después de t minutos.
- La cantidad de sal en el tanque después de media hora.
- La concentración de sal en el tanque cuando quedan 100 gal de solución.

Solución. Sea $Q(t)$ la cantidad (en lb) de sal en el tanque después de t minutos.

Como inicialmente se tienen 10 libras de sal, entonces $Q(0) = 10$.

La rapidez de cambio de la cantidad $Q(t)$ de sal en el tanque en el instante t es

$$\frac{d}{dt}Q(t) = (\text{rapidez con que entra la sal}) - (\text{rapidez con que sale la sal})$$

¿Con qué rapidez entra la sal al tanque?

Ya que la solución entra con una rapidez $R_e = 4$ gal/min y con una concentración $C_e = 0,1$ lb/gal, entonces la rapidez con que entra la sal al tanque es

$$R_e C_e = (4 \text{ gal/min}) (0,1 \text{ libras/gal}) = 0,4 \frac{\text{libras}}{\text{min}}$$

¿Con qué rapidez sale la sal del tanque?

La rapidez con que la solución sale del tanque es $R_s = 5$ gal/min. Pero ¿con qué concentración de sal?

Ya que la salmuera entra a razón de 4 gal/min y la solución mezclada sale a razón de 5 gal/min, entonces el tanque pierde 1 gal de solución en cada minuto que transcurre. Después de t minutos se habrán perdido t galones de solución de los 500 galones iniciales. Es decir, después de t minutos quedarán en el tanque $(500 - t)$ galones de solución, en los que estarán disueltas $Q(t)$ lb de sal, por lo que la concentración de sal en la solución que sale será

$$C_s = \frac{Q(t)}{500 - t} \text{ lb/gal.}$$

Entonces la rapidez con que sale la sal del tanque es

$$R_s C_s = (5 \text{ gal/min}) \left(\frac{Q(t)}{500 - t} \text{ lb/gal} \right) = \frac{5Q(t)}{500 - t} \text{ libras/min.}$$

Por lo tanto, la rapidez de cambio de la cantidad $Q(t)$ de sal en el tanque, después de t minutos es

$$\frac{d}{dt}Q(t) = R_e C_e - R_s C_s = 0,4 - \frac{5Q(t)}{500 - t}$$

o sea,

$$Q'(t) + \frac{5}{500 - t}Q(t) = 0,4.$$

Luego, la cantidad $Q(t)$ está dada por la solución del PVI:

$$Q'(t) + \frac{5}{500 - t}Q(t) = 0,4; \quad \text{con } Q(0) = 10.$$

- a) Resolvemos la ecuación diferencial: $Q'(t) + \frac{5}{500 - t}Q(t) = 0,4$. Ésta es una ED lineal no homogénea y tiene por factor integrante lo siguiente:

$$e^{\int \frac{5}{500 - t} dt} = e^{5 \int \frac{1}{500 - t} dt} = e^{-5 \ln(500 - t)} = e^{\ln(500 - t)^{-5}} = (500 - t)^{-5},$$

por lo cual:

$$\begin{aligned} (500 - t)^{-5} \left[Q'(t) + \frac{5}{500 - t}Q(t) \right] &= (0,4) (500 - t)^{-5} \implies \frac{d}{dt} \left[(500 - t)^{-5} Q(t) \right] = \frac{0,4}{(500 - t)^5} \\ \implies (500 - t)^{-5} Q(t) &= (0,4) \int (500 - t)^{-5} dt + C \\ \implies (500 - t)^{-5} Q(t) &= \frac{(0,4)}{4} (500 - t)^{-4} + C \\ \implies Q(t) &= (0,1) (500 - t) + C (500 - t)^5. \end{aligned}$$

Ahora bien, considerando la condición inicial:

$$\begin{aligned} Q(0) = 10 &\iff (0,1) (500 - 0) + C (500 - 0)^5 = 10 \implies 50 + C (500)^5 = 10 \\ &\implies C (500)^5 = -40 \implies C = -\frac{40}{(500)^5}, \end{aligned}$$

por lo que

$$Q(t) = (0,1) (500 - t) - \frac{40}{(500)^5} (500 - t)^5 \implies Q(t) = (0,1) (500 - t) - 40 \left(\frac{500 - t}{500} \right)^5,$$

es la cantidad (en libras) de sal que hay en el tanque después de t minutos.

b) La cantidad de sal que hay en el tanque después de media hora (30 min) es

$$\begin{aligned} Q(30) &= (0,1)(500-30) - 40 \left(\frac{500-30}{500} \right)^5 \\ &= (0,1)(470) - 40 \left(\frac{47}{50} \right)^5 = 47 - 29,3562 = 17,6438. \\ Q(30) &= 17,6438 \text{ libras.} \end{aligned}$$

c) ¿Cuál es la concentración de sal en el tanque cuando quedan 100 galones de solución?

Después de t minutos hay en el tanque $500 - t$ galones de solución y éstos serán 100 galones cuando: $500 - t = 100$, o sea $t = 400$. Es decir, en el tanque hay 100 gal de solución cuando han transcurrido $t = 400$ minutos.

La cantidad de sal en dicho instante es

$$\begin{aligned} Q(400) &= (0,1)(500-400) - 40 \left(\frac{500-400}{500} \right)^5 = (0,1)(100) - 40 \left(\frac{1}{5} \right)^5 \\ &= 10 - 40 \left(\frac{1}{5} \right)^5 = 10 - 0,0128 \\ \Rightarrow Q(400) &= 9,9872 \text{ libras;} \end{aligned}$$

por lo tanto, la concentración de sal en el tanque en este instante es

$$\begin{aligned} C(400) &= \frac{Q(400)}{100} \frac{\text{lib}}{\text{gal}} = \frac{9,9872}{100} \frac{\text{lib}}{\text{gal}} \Rightarrow C(400) = \frac{9,9872}{100} \frac{\text{lib}}{\text{gal}} = 0,099872 \frac{\text{lib}}{\text{gal}} \\ &\Rightarrow C(400) \approx 0,1 \frac{\text{lib}}{\text{gal}} \end{aligned}$$

3. Un estanque contiene 100 m^3 de agua contaminada. Con el propósito de descontaminarlo se introduce agua limpia a razón de $2 \text{ m}^3/\text{min}$ y el agua contaminada (uniformemente mezclada) se deja salir del estanque a la misma razón.

a) ¿Qué porcentaje de contaminantes se habrá eliminado después de 1 h?

b) ¿Qué tiempo debe transcurrir para que los contaminantes disminuyan en un 90 %?

Solución: Sea Q_0 la cantidad inicial (en $t = 0$) de contaminantes en el estanque y sea $Q(t)$ la cantidad de contaminantes después de t minutos.

La rapidez de cambio de la cantidad $Q(t)$ de contaminantes en el estanque, en el minuto $t \geq 0$ es

$$\frac{d}{dt}Q(t) = (\text{rapidez con que entran los contaminantes}) - (\text{rapidez con que salen contaminantes})$$

Como entra agua limpia al estanque, entonces nada entra de contaminante.

Como entra y sale agua del estanque a la misma razón ($2 \text{ m}^3/\text{min}$), entonces la cantidad de agua en el estanque es siempre la misma (100 m^3), por lo cual la concentración de contaminantes en cada m^3 de agua que sale del estanque es $\frac{Q(t)}{100}$.

Luego,

$$\frac{d}{dt}Q(t) = 2(0) - 2 \left(\frac{Q(t)}{100} \right) \Rightarrow Q'(t) = -\frac{Q(t)}{50}.$$

Por lo tanto, la cantidad $Q(t)$ de contaminantes en el estanque, después de t minutos, está dada por la solución del PVI:

$$Q'(t) + \frac{1}{50}Q(t) = 0, \quad \text{con } Q(0) = Q_0.$$

Se observa que se trata de una ED lineal homogénea, que podemos resolver separando variables.

a) ¿Qué porcentaje de contaminantes se habrá eliminado después de una hora?

$$\begin{aligned} Q'(t) + \frac{1}{50}Q(t) &= 0 \implies \frac{Q'(t)}{Q(t)} = -\frac{1}{50} \implies \int \frac{Q'(t)}{Q(t)} dt = -\frac{1}{50} \int dt \\ \implies \ln Q(t) &= -\frac{1}{50}t + C \implies Q(t) = Ce^{-t/50}, \end{aligned}$$

que es la solución general de la ED. Ahora bien,

$$C = Q(0) = Q_0 = Ce^0 = C \implies C = Q_0.$$

Por lo que,

$$Q(t) = Q_0 e^{-t/50}.$$

Entonces, la cantidad de contaminantes después de 60 minutos (1 hora), en el estanque, es

$$Q(60) = Q_0 e^{-60/50} \implies Q(60) = Q_0 e^{-6/5} \implies Q(60) = Q_0 e^{-1.2}.$$

Así, la cantidad de contaminantes que se han eliminado del estanque, en 60 min, es

$$Q_0 - Q(60) = Q_0 - Q_0 e^{-1.2} = Q_0 (1 - e^{-1.2}).$$

¿Y qué porcentaje es esta cantidad de Q_0 ?

$$\frac{Q_0 - Q(60)}{Q_0} (100) = \frac{Q_0 (1 - e^{-1.2})}{Q_0} (100) = 100 (1 - e^{-1.2}) = 69,88.$$

Por lo tanto, después de 1 h se habrá eliminado el 69,88 % de los contaminantes del estanque.

b) ¿Qué tiempo debe transcurrir para que los contaminantes disminuyan en un 90 %?

Si después de $t = t_1$ minutos los contaminantes han disminuido en un 90 %, entonces:

$$Q(t_1) = 10 \% \text{ de } Q_0 = (0,1) Q_0.$$

Luego,

$$\begin{aligned} Q(t_1) &= (0,1) Q_0 \implies Q_0 e^{-t_1/50} = (0,1) Q_0 \implies e^{-t_1/50} = 0,1 \\ \implies t &= -50 \ln(0,1) \approx 115,13 \text{ minutos.} \end{aligned}$$

Por lo tanto, para que los contaminantes en el estanque hayan disminuido en un 90 % deben transcurrir aproximadamente 115 minutos, 8 segundos.

4. Consideremos un depósito que contiene 50 litros de agua con 75 gramos de sal disueltos. En un determinado instante comienza a entrar agua salada a razón de 2 litros/minuto, con una concentración de 3 gramos/litro de sal, mientras que el agua, perfectamente mezclada, sale del depósito a razón de 2 litros/minuto. Queremos determinar en qué instante la cantidad de sal en el depósito será de 125 g. En la figura se presenta un esquema de la situación.

5. Llamemos $S(t)$ a la cantidad de sal en el depósito en el instante t . Notemos que el volumen de agua en el depósito es siempre de 50 litros, ya que en cada instante entran dos litros y salen otros dos. Por tanto, la concentración de sal en cada instante será de $\frac{S(t)}{50} \frac{g}{l}$. La velocidad de variación de la concentración de sal viene dada por $S'(t)$, que se expresa en gramos/minuto.

Por un lado, el aporte de sal por minuto al depósito será de: $2 \frac{\text{litros}}{\text{minuto}} \times 3 \frac{\text{gramos}}{\text{litro}} = 6 \frac{\text{gramos}}{\text{minuto}}$, mientras que la tasa de pérdida de sal es de

$$2 \frac{\text{litros}}{\text{minuto}} \times \frac{S(t)}{50} \frac{\text{gramos}}{\text{litro}} = \frac{S(t)}{25} \frac{\text{gramos}}{\text{minuto}}$$

La variación total de la concentración de sal viene dada por la diferencia entre el aporte y la pérdida de sal. Obtenemos así la siguiente ecuación diferencial

$$S'(t) = 6 - \frac{S(t)}{25}.$$

La condición inicial es $S(0) = 75$, ya que inicialmente hay 75 gramos de sal en el depósito.

La ecuación diferencial es de variables separadas, aunque también es una ecuación lineal. La solución del problema de valor inicial es $S(t) = 150 - 75e^{-t/25}$.

Nótese que la función $S(t)$ es creciente, ya que $S'(t) = 3e^{-t/25} > 0$. Esto significa que la cantidad de sal en el depósito aumenta al avanzar el tiempo.

Para determinar cuándo la cantidad de sal en el depósito será de 125 gramos por ejemplo, basta con resolver la ecuación $S(t) = 125$:

$$S(t) = 125 \implies 150 - 75e^{-t/25} = 125 \implies t = -25 \ln \left(\frac{1}{3} \right) = 25 \ln 3 \approx 27,4653 \text{ minutos.}$$

6. Supongamos que un tanque mezclador grande contiene 300 galones de agua, en donde se ha disuelto sal. Otra solución de salmuera se bombea al tanque a una tasa de 3 galones por minuto. El contenido se agita perfectamente y es desalojado a la misma tasa. Si la concentración de la solución que entra es 2 libras/galón, hay que armar un modelo de la cantidad de sal en el tanque en cualquier momento.

Solución. Sea $A(t)$ la cantidad de sal (en libras) en el tanque en cualquier momento t . En este caso, la rapidez con que cambia $A(t)$ es la tasa neta:

$$\frac{dA}{dt} = (\text{tasa de entrada de la sustancia}) - (\text{tasa de salida de la sustancia}) = R_1 - R_2 \quad (*)$$

Ahora bien, la razón, R_1 , con la que entra la sal al tanque, en lb/min , es

$$R_1 = \left(3 \frac{gal}{min} \right) \left(2 \frac{lb}{gal} \right) = 6 \frac{lb}{min}.$$

Mientras que la razón, R_2 , con que sale la sal es

$$R_2 = \left(3 \frac{gal}{min} \right) \left(\frac{A}{300} \frac{lb}{gal} \right) = \frac{A}{100} \frac{lb}{min}.$$

Entonces, la ecuación (*) se transforma en

$$\frac{dA}{dt} = 6 - \frac{A}{100} \quad (**)$$

7. El tanque de la Figura contiene inicialmente 100 galones de agua pura. En el tiempo $t = 0$, una solución que contiene 2 libras de sal por galón comienza a entrar en el tanque a una velocidad de 3 galones por minuto. Al mismo tiempo se abre un drenaje en la parte inferior del tanque para que el volumen de solución en el tanque permanezca constante. ¿Cuánta sal está en el tanque después de 60 min?

Solución. Comencemos por designar $x(t)$ el número de libras de sal en el tanque después de t min. En consecuencia, la derivada dx/dt es la representación matemática de la velocidad a la cual la cantidad de sal está cambiando con respecto al tiempo. El proceso de modelado consiste en calcular una representación física de la tasa de cambio y establecerla igual. El resultado final es una ecuación diferencial para la función $x(t)$.

Es muy útil en el proceso de modelado realizar un seguimiento de las unidades utilizadas. Por ejemplo, puesto que estamos midiendo x en libras y tiempo en minutos, la derivada dx/dt se mide en libras por minuto ($\frac{lb}{min}$). En la declaración del problema se nos dan las tasas de flujo dentro y fuera del tanque. Estas son las velocidades de volumen, medidas en galones por minuto (gal/min). Además, se nos da la concentración de la solución que entra en el tanque, y esto se mide en libras por galón ($\frac{lb}{gal}$).

La representación física de la tasa de cambio se divide naturalmente en dos partes ya que hay un flujo en el tanque y otro hacia fuera. Así podemos escribir

$$\text{Tasa de cambio} = \text{tasa de entrada} - \text{tasa de salida}.$$

Esta útil separación de efectos se denomina a veces ley de equilibrio. Dado que la tasa de cambio se mide en $\frac{lb}{\text{mín}}$, lo mismo debe ser verdad para la tasa de entrada y la tasa de salida.

Examinemos la velocidad: La solución entra en el tanque a una velocidad de volumen de $3 \frac{gal}{\text{mín}}$. La concentración de sal en esta solución es de $2 \frac{lb}{gal}$. Por consiguiente,

$$\text{tasa de entrada} = \text{tasa de volumen} \times \text{concentración} = 3 \frac{gal}{\text{mín}} \times 2 \frac{lb}{gal} = 6 \frac{lb}{\text{mín}}.$$

La velocidad a la que sale sal del tanque es un poco más complicada. Tenemos:

$$\text{Tasa de salida} = \text{tasa de volumen} \times \text{concentración}.$$

Dado que el volumen se mantiene constante, sabemos que la solución sale por el desagüe en la parte inferior del tanque con una tasa de volumen de $3 \frac{gal}{\text{mín}}$, pero ¿cuál es la concentración de sal en el agua que sale del tanque? Asumiremos que la mezcla en el tanque se mezcla instantáneamente en todo momento para que la concentración de la sal no cambie de punto a punto. Es cierto que esto probablemente no sea una suposición precisa, pero es un buen punto de partida y nos permite completar el modelo usando ecuaciones diferenciales ordinarias. Sin esta hipótesis todavía podemos modelar el sistema, pero la concentración dependería de la posición dentro del tanque, y el modelo sería una ecuación diferencial parcial. Con nuestro supuesto de mezcla perfecta, la concentración de sal en el tanque en cualquier momento t se calcula dividiendo la cantidad de sal en el tanque en el instante t por el volumen de solución en el tanque. La concentración en el tiempo t , $c(t)$, viene dada por

$$C(t) = \frac{x(t)}{100} lb/gal.$$

Ahora podemos determinar la velocidad a la que sale del tanque:

$$\text{Tasa de salida} = 3 \frac{gal}{\text{mín}} \times \frac{x(t)}{100} \frac{lb}{gal} = \frac{3}{100} \frac{lb}{\text{mín}} x(t).$$

Nuestra discusión nos ha llevado a la ecuación diferencial

$$\frac{dx}{dt} = \text{tasa de cambio} = \text{Tasa entrada} - \text{tasa de salida} = 6 - \frac{3x}{100}.$$

Esta ecuación tiene la forma $\frac{dx}{dt} = a(t)x + f(t)$, por lo que es lineal, y para encontrar su solución, primero, reescribimos la ecuación como

$$\frac{dx}{dt} + \frac{3x}{100} = 6.$$

A continuación se calcula el factor de integración, $\mu(t) = e^{\int \frac{3}{100} dt} = e^{\frac{3t}{100}}$.

Cuando multiplicamos ambos lados de la ecuación $\frac{dx}{dt} + \frac{3x}{100} = 6$ por $\mu(t)$, observamos que

$$\left[e^{3t/100} x \right]' = e^{3t/100} \left(\frac{dx}{dt} + \frac{3x}{100} \right) = 6e^{3t/100}.$$

Integramos ambos lados de esta ecuación para obtener:

$$e^{3t/100} x = \int 6e^{3t/100} dt = \frac{600}{3} e^{3t/100} + C.$$

Finalmente, obtenemos la solución general resolviendo para x :

$$x(t) = 200 + Ce^{-3t/100}.$$

Dado que no había sal presente en el tanque inicialmente, la condición inicial es $x(0) = 0$. Por lo tanto

$$0 = x(0) = 200 + Ce^{-3(0)/100} \implies C = -200.$$

En consecuencia, $C = -200$ y nuestra solución es

$$x(t) = 200 - 200e^{-3t/100}.$$

Se deja como ejercicio graficar la solución. La cantidad de sal presente en el tanque después de 60 minutos es

$$x(60) = 200 - 200e^{-3(60)/100} \approx 167 \text{ lb.}$$

Ejercicios Mezclas.

1. Un tanque contiene 100 litros de agua salada en el cual hay 2 kg de sal disueltos. Agua salada con 0,25 kg de sal por litro entra al tanque a razón de 16 litros/min y la mezcla bien agitada sale a la misma razón.

- a) Obtener la cantidad de sal en el tanque después de t minutos.
- b) Determinar la cantidad de sal después de 10 min.
- c) Determinar la concentración de sal después de media hora.
- d) ¿Cuánta sal hay después de un tiempo largo?
(Respuesta: a) $Q(t) = 25 - 23e^{-4t/25}$; b) $Q(10) \approx 20$ kg, 356 g; c) $C_{30} = 0,2481$ kg/litro; d) $Q_{lim} = 25$ kg.)

2. Un tanque contiene 50 gal de agua pura. Una solución de agua salada con 1 lb de sal por galón entra al tanque a razón de 2 gal/min y la mezcla bien agitada sale a la misma razón.

- a) ¿Cuánta sal hay en el tanque después de t minutos?
- b) ¿Cuánto tiempo debe transcurrir para que la mezcla del tanque tenga una concentración de 0,5 libras de sal por galón?
- c) ¿Cuál es la concentración de sal después de un tiempo largo?
Respuesta: a) $Q(t) = 50(1 - e^{-t/25})$ lb; b) $t \approx 17$ min, 20 s; c) $C_{lim} = 1$ lb/gal.

3. Un tanque contiene 100 gal de agua salada con 10 libras de sal disuelta. Agua salada con 1,5 libras de sal por galón entra al tanque a razón de 3 gal/min y la mezcla bien agitada sale a razón de 4 gal/min.

- a) Obtener la cantidad de sal en el tanque en cualquier tiempo $t \geq 0$.
- b) Determinar la cantidad de sal en el tanque después de 10 min.
- c) Calcular la concentración de sal en el tanque después de 20 min.
- d) Determinar la concentración de sal en el tanque, cuando hay solamente 10 gal de solución.
Respuesta: a) $Q(t) = (1,5)(100 - t) - 140\left(\frac{100 - t}{100}\right)^4$ lb; b) $Q(10) = 43,146$ lb; c) $C_{20} = 0,7832$ lb/gal; d) $C_{90} = 1,4986$ lb/gal.

4. Un tanque con capacidad para 500 gal contiene inicialmente 10 lb de sal disueltas en 200 gal de agua. Se bombea al tanque salmuera que contiene 2 lb/gal a razón de 4 gal/min y se permite que la mezcla salga del tanque a razón de 3 gal/min.

- a) ¿Qué cantidad de sal hay en el tanque después de t minutos?
- b) ¿Cuál es la concentración de sal después de una hora?
- c) ¿Cuánta sal contiene el tanque cuando se llena?
- d) ¿Cuál es la concentración de sal en el tanque cuando se llena?
Respuesta: a) $X(t) = 2(200 + t) - 390\left(\frac{200}{200 + t}\right)^3$ lb; b) $C_{60} = 1,31725$ lb/gal; c) $X(300) \approx 975$ lb; d) $C_{300} = 1,95$ lb/gal.

5. Un tanque contiene inicialmente 60 gal de agua pura. A razón de 2 gal/min entra al tanque salmuera que contiene 1 libra de sal por galón y la solución uniformemente mezclada sale del tanque a razón de 3 gal/min.

- Obtener la cantidad de sal en el tanque después de t minutos.
- Calcular la concentración de sal en el tanque después de media hora.
- Determinar la concentración de sal en el tanque cuando hay solamente 10 gal de solución.
- ¿Cuál es la máxima cantidad de sal que llega a tener el tanque?

Respuesta: a) $A(t) = (60 - t) - 60 \left(\frac{60 - t}{60} \right)^3$ lb; b) $C_{30} = 0,75$ lb/gal; c) $C_{50} = 0,972$ lb/gal; d) $A_{m\acute{a}x} = 23,094$ lb, en $t = 25,38$ min.

6. Un depósito contiene 100 gal de salmuera en la que hay disueltas 40 lb de sal. Se desea reducir la concentración de sal hasta 0,1 lb/gal vertiendo agua pura en el depósito a razón de 5 gal/min y permitiendo que salga a la misma razón. La mezcla se mantiene uniforme. ¿Cuánto tiempo pasará hasta que se logre lo deseado? (Respuesta: $t = 27$ min, 44 s)

7. Un gran tanque está parcialmente lleno con 100 galones de agua en los cuales hay 10 lb de sal disuelta. Una salmuera que contiene 12 lb de sal por galón se bombea al tanque con una rapidez de 6 gal/min. La solución adecuadamente mezclada se bombea hacia afuera del tanque con una rapidez de 4 gal/min. Calcular el número de libras de sal que hay en el tanque después de 30 min. (Respuesta: $Q(30) = 64,375$ lb)

8. Se bombea cerveza con un contenido de 8% de alcohol por galón a un tanque que inicialmente contiene 500 galones de cerveza con 6 % de alcohol. La cerveza se bombea hacia el interior a razón de 5 gal/min en tanto que el líquido mezclado se extrae del tanque a razón de 6 gal/min.

- ¿Qué cantidad de alcohol hay en el tanque después de t minutos?
- ¿Cuál es el porcentaje de alcohol en el tanque después de 1 h?

(Respuesta: a) $A(t) = (0,08)(500 - t) - 10 \left(\frac{500 - t}{500} \right)^6$ gal; b) 6,94 %)

9. Un tanque de 100 galones contiene inicialmente agua pura. Una solución de colorante al 30 % fluye hacia el tanque a una tasa de 5 gal/min y la mezcla resultante sale a la misma tasa. Después de 15 minutos el proceso se detiene y se hace fluir agua pura al tanque a una tasa de 5 gal/min (la mezcla sale a la misma tasa). Encuentre la cantidad de colorante en el tanque después de 30 minutos. (Respuesta: 7,477 gal.)

10. Un tanque de 100 galones se llena inicialmente con 40 % de solución colorante. Una solución colorante al 20 % fluye hacia el tanque a una tasa de 5 gal/min. La mezcla sale del tanque a la misma tasa y pasa a otro tanque de 100 galones que se había llenado inicialmente con agua pura. La mezcla resultante sale del segundo tanque a una tasa de 5 gal/min. Obtener una expresión para la cantidad de colorante en el segundo tanque. ¿Cuál es la concentración de colorante en el segundo tanque después de 30 minutos? (Respuesta: $20 + (t - 20)e^{-t/20}$; 22,23 %)

2.7. Movimiento de un cuerpo

Un paracaidista salta de un avión y cae libremente durante 30 segundos. Durante este tiempo la resistencia del aire es despreciada. Cuando su paracaídas se abre, la resistencia del aire es proporcional a su velocidad. Encuentre la velocidad del paracaidista a partir del instante en que el paracaídas se abrió.

Solución: Suponga que el paracaidista tiene masa m . Entonces, antes de que el paracaídas se abra tenemos:

$$m \frac{dv}{dt} = mg \iff \frac{dv}{dt} = g,$$

de donde se obtiene $v = gt + C$, donde g es la constante gravitacional. Como la velocidad inicial $v(0) = 0$, entonces, $v = gt$, y así, $v(30) = 30g$, que es la condición inicial del problema cuando el paracaídas se abre.

En este caso, como las fuerzas actuantes son el peso del paracaidista, mg , y la fuerza de resistencia, kv , se tiene:

$$m \frac{dv}{dt} = mg - kv \iff \frac{dv}{dt} + \frac{k}{m}v = g$$

Observe que la resistencia del aire, kv , tiene signo negativo, pues ésta siempre reduce la velocidad. Se resuelve esta ecuación diferencial utilizando el factor integrante $\mu = e^{kt/m}$. Se obtiene

$$v(t) = \frac{m}{k}g + Ce^{-kt/m}.$$

Con la condición inicial $v(30) = 30g$, se obtiene

$$v(t) = \frac{m}{k}g + \left(30g - \frac{mg}{k}\right)e^{-kt/m}.$$

Observe que cuando $t \rightarrow +\infty$, $v(t) \rightarrow \frac{mg}{k}$, que es llamada velocidad límite.

El diagrama de bloques de simulink que modela la velocidad del paracaidista se muestra en la figura 2.12.

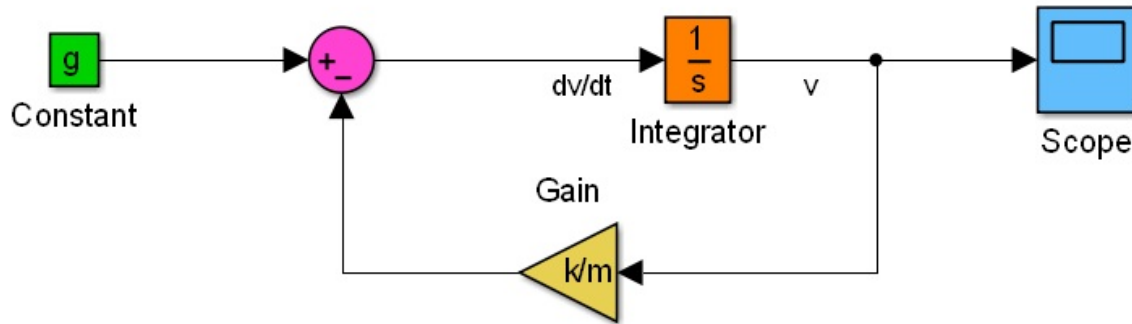


Figura 2.12 Diagrama de bloques para $\frac{dv}{dt} + \frac{k}{m}v = g$.

2.8. Trayectorias ortogonales

Si consideramos la familia de curvas $x^2 + y^2 = c$; con $c > 0$; podemos decir que esta familia es el conjunto de las circunferencias de radio $r = \sqrt{c}$ con centro en el origen.

Ésta es una familia de curvas de la forma:

$$F(x; y) = c, \text{ donde } F(x; y) = x^2 + y^2.$$

Una ecuación diferencial asociada a esta familia de curvas es:

$$y' = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}} = -\frac{F_x}{F_y} = -\frac{2x}{2y} = -\frac{x}{y}.$$

En un punto arbitrario del plano $(x; y)$, la curva de la familia que pasa por ese punto tiene recta tangente con pendiente $-\frac{x}{y}$. Por ejemplo, por el punto $(2; 3)$ pasa la circunferencia de radio $\sqrt{13}$ y su recta tangente en dicho punto tiene pendiente $m_1 = -\frac{2}{3}$.

Ahora bien, se sabe que dos rectas que se intersecan son perpendiculares, si sus pendientes satisfacen: $m_1 m_2 = -1$ o bien $m_1 = -\frac{1}{m_2}$ o bien $m_2 = -\frac{1}{m_1}$. Es decir, la pendiente de una recta es el negativo del inverso multiplicativo de la pendiente de la otra.

Existen curvas que pasan por el punto $(2; 3)$ y que tienen como pendiente de la tangente $m_2 = \frac{3}{2}$. Por ejemplo, $y = \frac{1}{8}x^3 + 2$ pasa por el punto $(2; 3)$ y la pendiente de su tangente en ese punto es $m_2 = \frac{3}{2}$.

Decimos entonces que, en el punto $(2; 3)$, las curvas $x^2 + y^2 = 13$ y $y = \frac{1}{8}x^3 + 2$ son ortogonales puesto que sus tangentes son ortogonales. Cumplen que $m_1 m_2 = -1$. Ahora, si tomamos un punto arbitrario del plano $(x; y)$ por donde pasa una circunferencia de radio $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ cuya tangente tiene pendiente $m_1 = -\frac{x}{y}$ podemos generar entonces una ecuación diferencial con la igualdad $m_2 = -\frac{1}{m_1}$. Esta es

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}. \quad (3.1)$$

La anterior ED tiene soluciones tales que, cuando una curva solución pasa por el punto $(x; y)$, su recta tangente es ortogonal a la tangente de la circunferencia que pasa por ese punto.

Vamos a resolver la ecuación diferencial anterior (3.1) por separación de variables:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} \implies \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x} \implies \int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x} \implies \ln y = \ln x + C_1 \implies y = Cx.$$

La solución general de esta ecuación diferencial representa a la familia de rectas que pasa por el origen.

Como vemos, cada recta de la familia $y = Cx$ interseca ortogonalmente a cada una de las circunferencias de la familia $x^2 + y^2 = c$. Así, con el método indicado, hallamos una familia de curvas (y no una única curva) tal que cada uno de sus miembros es ortogonal a cada una de las curvas de la familia $x^2 + y^2 = c$.

Esto se ve en la siguiente figura:

Supongamos que tenemos dos familias de curvas (las cuales llamaremos C_1 y C_2), cuando cada curva de una familia C_1 es ortogonal a cada una de las curvas de otra familia C_2 , se dice que C_1 y C_2 son familias ortogonales de curvas o bien que C_1 y C_2 son familias de trayectorias ortogonales.

¿Cómo encontrar la familia ortogonal a una familia dada?

Si tenemos una familia de curvas de la forma

$$F(x; y) = c$$

Se calcula la ecuación diferencial asociada a dicha familia, es decir:

$$y' = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}.$$

Se afirma entonces que la ecuación diferencial asociada a la familia ortogonal es

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial x}}$$

Resolvemos esta ecuación diferencial y su solución general es la familia ortogonal a la familia dada.

Ejemplos

1. Obtener la familia ortogonal a la familia: $y = cx^2$.

Solución. Esta familia es el conjunto de las parábolas con vértice en el origen. Calculamos la ecuación diferencial asociada a esta familia de curvas. Escribimos $y = cx^2$ como $\frac{y}{x^2} = c$ donde

$$F(x; y) = \frac{y}{x^2} \implies \begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = -\frac{2y}{x^3}, \\ \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{1}{x^2} \end{cases}$$

Entonces la ecuación diferencial asociada a la familia de parábolas es

$$y' = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}} = -\frac{-\frac{2y}{x^3}}{\frac{1}{x^2}} \Rightarrow y' = \frac{2y}{x}.$$

Por lo tanto la ecuación diferencial asociada a la familia ortogonal es

$$y' = -\frac{x}{2y}.$$

Resolvemos esta ED por variables separables:

$$\begin{aligned} y' &= -\frac{x}{2y} \Rightarrow 2ydy = -xdx \Rightarrow 2 \int ydy = - \int xdx + C \Rightarrow y^2 = -\frac{x^2}{2} + C \\ \Rightarrow \frac{x^2}{2} + y^2 &= C \Rightarrow \frac{x^2}{2C} + \frac{y^2}{C} = 1; \end{aligned}$$

esta última ecuación es la familia ortogonal y representa una familia de elipses con centro en el origen.

2. Determinar las trayectorias ortogonales de la familia de curvas $2x^2 + y^2 = 4cx$; con c constante.

Solución. Obtenemos la ED asociada a esta familia:

$$\begin{aligned} 2x^2 + y^2 = 4cx &\Rightarrow \frac{2x^2+y^2}{4x} = c \Rightarrow F(x; y) = \frac{2x^2+y^2}{4x} \Rightarrow \\ F(x; y) = \frac{x}{2} + \frac{y^2}{4x} &\Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{1}{2} - \frac{y^2}{4x^2}, \\ \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{y}{2x} \end{cases} \end{aligned}$$

Luego, la ED asociada es

$$y' = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}} = -\frac{\frac{1}{2} - \frac{y^2}{4x^2}}{\frac{y}{2x}} \Rightarrow y' = -\frac{\frac{2x^2 - y^2}{4x^2}}{\frac{y}{2x}} \Rightarrow y' = -\frac{\frac{y^2 - 2x^2}{4x^2}}{\frac{y}{2x}} \Rightarrow y' = -\frac{2x^2 - y^2}{2xy}.$$

Por lo tanto, la ED asociada a las trayectorias ortogonales es

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial x}} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{2xy}{2x^2 - y^2}.$$

Como se observa, esta ED es homogénea y la resolvemos como tal

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2xy}{2x^2 - y^2} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{2\frac{y}{x}}{2 - \frac{y^2}{x^2}} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{2\left(\frac{y}{x}\right)}{2 - \left(\frac{y}{x}\right)^2}.$$

Haciendo la sustitución $z = \frac{y}{x}$, tenemos: $y = xz$ y por tanto $\frac{dy}{dx} = z + x\frac{dz}{dx}$. Luego:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{2\left(\frac{y}{x}\right)}{2 - \left(\frac{y}{x}\right)^2} \Rightarrow z + x\frac{dz}{dx} = \frac{2z}{2 - z^2} \Rightarrow x\frac{dz}{dx} = \frac{2z}{2 - z^2} - z \Rightarrow x\frac{dz}{dx} = \frac{2z - 2z + z^3}{2 - z^2} \\ \Rightarrow x\frac{dz}{dx} &= \frac{z^3}{2 - z^2} \Rightarrow \frac{(2 - z^2) dz}{z^3} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \left(\frac{2}{z^3} - \frac{1}{z}\right) dz = \frac{dx}{x} \\ \Rightarrow \left(2z^{-3} - \frac{1}{z}\right) dz &= \frac{dx}{x} \Rightarrow \int \left(2z^{-3} - \frac{1}{z}\right) dz = \int \frac{dx}{x} + C \Rightarrow -\frac{1}{z^2} - \ln z = \ln x + C \\ \Rightarrow \ln x + \ln z + \frac{1}{z^2} &= C. \end{aligned}$$

Y debido a que $z = \frac{y}{x}$, al sustituir en la ED se tiene que:

$$\ln x + \ln\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{x^2}{y^2} = C \implies \ln x + \ln y - \ln x + \frac{x^2}{y^2} = C \implies \ln y + \frac{x^2}{y^2} = C \implies x^2 + y^2 \ln y = Cy^2.$$

Por lo tanto, las trayectorias ortogonales están dadas por la familia de curvas:

$$x^2 + y^2 \ln y = Cy^2, \text{ donde } C \text{ es constante.}$$

3. Calcular las trayectorias ortogonales de la familia de curvas $\cos y = ce^{-x}$, con c constante.

Solución. Obtenemos la ED asociada a esta familia de curvas:

$$\cos y = ce^{-x} \implies e^x \cos y = c \implies F(x; y) = e^x \cos y \implies \begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = e^x \cos y, \\ \frac{\partial F}{\partial y} = -e^x \sin y \end{cases}$$

Luego, la ED asociada es

$$y' = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}} \implies y' = -\frac{e^x \cos y}{-e^x \sin y} \implies y' = \frac{\cos y}{\sin y}.$$

Por lo que, la ED asociada a las trayectorias ortogonales es

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\sin y}{\cos y},$$

que resolvemos por variables separables.

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= -\frac{\sin y}{\cos y} \implies \frac{\cos y}{\sin y} dy = -dx \implies \int \frac{\cos y}{\sin y} dy = -\int dx + C_1 \\ \implies \ln(\sin y) &= C_1 - x \implies \sin y = e^{C_1 - x} \\ \implies \sin y &= Ce^{-x}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, las trayectorias ortogonales están dadas por:

$$\sin y = Ce^{-x}, \text{ con } C \text{ constante.}$$

4. Halle las trayectorias ortogonales a la familia de curvas $y_c = cx^5$. Suponga que y es una curva ortogonal a todas las curvas y_c .

Solución. Primero que todo, si y y y_c se intersecan en x entonces $y_c(x) = y(x)$, por lo que $c = \frac{y(x)}{x^5}$.

Por otro lado, $y'_c(x) = 5cx^4$, y como para encontrar la familia de trayectorias ortogonales a la familia $y_c(x)$ se resuelve la ecuación

$$y' = -\frac{1}{y'_c(x)},$$

la ecuación diferencial por resolver es

$$y' = -\frac{1}{5cx^4}, \text{ con } x \neq 0.$$

Observe que antes de resolver la ecuación hay que sustituir el valor de $c = \frac{y(x)}{x^5}$, puesto que el parámetro c va variando y por lo tanto no se puede tratar como constante.

Por lo tanto hay que resolver

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}, \text{ con } x \neq 0, \quad y \neq 0.$$

Esta ecuación se puede escribir como

$$5y \, dy = -x \, dx$$

y nuevamente puede integrarse a ambos lados para obtener

$$\frac{5}{2}y^2 = -\frac{x^2}{2} + C \text{ o también, } \frac{x^2}{2} + \frac{5}{2}y^2 = C, \text{ con } x \neq 0, \quad y \neq 0,$$

por lo que las curvas son una familia de elipses. En el caso de que $x = y = 0$ la curva que es perpendicular a la familia y_c es el eje y .

5. Halle las trayectorias ortogonales a la familia de curvas dadas por la ecuación $x(y^2 + 1) + xy^2 = C$.

Solución. La única diferencia con respecto al problema anterior es que hay que derivar implícitamente. Aquí cabe mencionar que es usual eliminar el índice c en y_c por lo que derivando la familia de curvas

$$y^2 + 1 + x(2yy') + y^2 + x(2yy') = 0$$

o bien

$$y' = -\frac{2y^2 + 1}{4xy}, \text{ con } x \neq 0, \quad y \neq 0.$$

Luego, se tiene que resolver la ecuación

$$y' = \frac{4xy}{2y^2 + 1}$$

O bien

$$\frac{2y^2 + 1}{y} dy = 4x dx,$$

e integrando a ambos lados se tiene: $y^2 + \ln y = 2x^2 + C$.

2.9. Ejercicios trayectorias ortogonales.

Encontrar la familia de curvas ortogonales a cada una de las siguientes familias.

1. $y^2 = 2Cx$. (Respuesta: $2x^2 + y^2 = C$.)
2. $y = Ce^x$. (Respuesta: $y^2 + 2x = C$.)
3. $y^2 - 2x^2 = C$. (Respuesta: $xy^2 = C$.)
4. $Cx^2 + y^2 = 1$. (Respuesta: $x^2 + y^2 - \ln y^2 = C$.)
5. $y = Cx^2$. (Respuesta: $x^2 + 2y^2 = C$.)
6. $x^2 + y^2 = 2ay$. (Respuesta: $x^2 + y^2 = Cx$.)
7. $y^2 = 2p(x - a)$; $p \neq 0$ es un número conocido. (Respuesta: $y = Ce^{-x/p}$)
8. $x^2 - y^2 = a$. (Respuesta: $y = \frac{C}{x}$)
9. $y^2 = \frac{x^3}{2a - x}$. (Respuesta: $(x^2 + y^2)^2 = K(2x^2 + y^2)$.)
10. $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$. (Respuesta: $(x^2 + y^2)^2 = Kxy$.)

2.10. Modelización con ecuaciones diferenciales de primer orden

- Un tanque con capacidad de 500 galones originalmente contiene 200 galones de agua con 100 libras de sal en solución. Agua conteniendo una libra de sal por galón está entrando a una tasa de 3 gal/min, y se permite que la mezcla salga del tanque a una tasa de 2 gal/min.
 - Encontrar la cantidad de sal en el tanque en cualquier instante antes de que la solución comience a desbordar.
 - Encontrar la concentración (en libras por galón) de sal en el tanque cuando está en el punto de desbordamiento.
 - Compare esta concentración con la concentración teórica limitante si el tanque tuviera capacidad infinita.
- Una bola de masa 0,15 kg se lanza hacia arriba con una velocidad inicial de 20 m/s desde el techo de un edificio de 30 m de altura. Hay una fuerza debida a la resistencia del aire de $\frac{|v|}{30}$, donde la velocidad v es medida en m/s.
 - Encuentra la máxima altura por encima de la base que la pelota alcanza.
 - Encontrar el tiempo en que la pelota toca el suelo.
 - Dibuje el gráfico de la velocidad y posición en función del tiempo..

- Encontrar la ecuación de una curva cuya pendiente es igual al doble de la abscisa en todo punto (x, y) de la curva.

Solución: Se tiene que $y' = 2x$, de donde $y = x^2 + C$, es la ecuación de la familia de curvas que verifican la condición dada.

- Encontrar una curva que tiene su pendiente igual a la mitad de la abscisa y que pasa por el punto $(0, -3)$.

Solución: Como $y' = \frac{1}{2}x$, se sigue que $y = \frac{1}{4}x^2 + C$. Puesto que tiene que pasar por el punto $(0, -3)$, de $y(0) = -3$, se sigue que $C = -3$ y por tanto la curva buscada tiene por ecuación $y = \frac{1}{4}x^2 - 3$.

- Encontrar la ecuación de la curva que es perpendicular a la recta que une cualquier punto de la curva con el punto $(3, 4)$, si la curva pasa también por el origen.

Solución: Notemos con $P_1 = (3, 4)$ y $P = (x, y)$ cualquier punto de la curva. La pendiente de la tangente a la curva en P es inversa negativa de la recta P_1P , cuyo valor es $\frac{y-4}{x-3}$. En consecuencia

$y' = -\frac{x-3}{y-4}$. Separando las variables e integrando se obtiene que la familia de curvas está dada por:

$$\frac{y^2}{2} - 4y = 3x - \frac{x^2}{2} + C.$$

Como la curva debe pasar por el origen, entonces al hacer $x = 0$, $y = 0$, se encuentra que $C = 0$; luego la curva buscada tiene como solución $x^2 + y^2 - 6x - 8y = 0$, que es la ecuación de un círculo de centro $(3, 4)$ y radio 5.

- Se sabe que cierto material radiactivo se desintegra a una razón de cambio proporcional a la cantidad presente. Si inicialmente hay 100 miligramos de material presente y después de dos horas se observa que el material ha perdido el 10% de su masa original, hallar:
 - Una expresión para la masa de material restante en un momento t ,
 - la masa de material después de cuatro horas, y
 - el tiempo al cabo del cual el material se ha desintegrado en la mitad de su masa inicial.

Solución: Llamemos y a la cantidad de material presente en un momento t . Se tiene entonces que la razón de desintegración está dada por $\frac{dy}{dt} = ky$, ecuación que tiene como solución general $y(t) = Ce^{kt}$. Para $t = 0$, se tiene que $y = 100$, luego de $y(t) = Ce^{kt}$ se deduce que $C = 100$ y por tanto $y(t) = 100e^{kt}$.

Por otra parte para $t = 2$, la masa original de 100 mg se ha desintegrado en 10 % es decir, 10 mg. Luego, $y(2) = 100 - 10 = 90$ mg y de $90 = 100e^{2k}$ se sigue que $k = \frac{1}{2} \ln \frac{9}{10} = -0.05268 \dots$. Sustituyendo el valor de k , se tiene que la cantidad de masa presente en un momento t está dada por $y(t) = 100e^{-0.05268t}$.

7. El dinero depositado en cierto banco aumenta a una razón que es proporcional al saldo existente. Demostrar que el banco capitaliza el interés continuamente. ¿Cuál es la relación entre la constante de proporcionalidad y la tasa de interés anual?

Solución: Notemos por $S(t)$ el saldo existente en la cuenta después de t años y k la constante de proporcionalidad.

Se tiene entonces que $\frac{dS}{dt} = kS(t)$, cuya solución es $S(t) = e^C e^{kt}$. De esta expresión se sigue

que $S(0) = e^C$, es decir que e^C es el depósito o capital inicial, al mismo que lo notaremos S_0 . Luego, $S(t) = S_0 e^{kt}$, que es precisamente la fórmula para el saldo cuando el interés se capitaliza continuamente a una tasa de 100 por ciento al año.

8. La ecuación que rige la cantidad de corriente I (en amperios) en un circuito RL consistente en una resistencia R (en ohmios), un condensador L (en henrios), y una fuerza electromotriz (abreviada *fem*) E (en voltios) es

$$LI'(t) + RI(t) = E(t).$$

Agreguemos la condición inicial $I(0) = 0$, para indicar con ello que antes de cerrarse el circuito no circulaba corriente alguna.

La ecuación diferencial $LI'(t) + RI(t) = E(t)$, se transforma en $I'(t) + \frac{R}{L}I(t) = \frac{1}{L}E(t)$, que es una ecuación diferencial lineal y cuya solución general es

$$I(t) = \frac{1}{L}e^{-Rt/L} \int_0^t e^{Ru/L} E(u) du + Ke^{-Rt/L},$$

y como $I(0) = 0$, se sigue que $K = 0$ y por tanto

$$I(t) = \frac{1}{L}e^{-Rt/L} \int_0^t e^{Ru/L} E(u) du.$$

Si la fuerza electromotriz tuviese un valor constante E_0 , se tendría que

$$I(t) = \frac{E_0}{R} - \frac{E_0}{R}e^{-Rt/L}.$$

9. Un torpedo de masa $m = 1$ es lanzado horizontalmente, debajo del agua, con velocidad inicial v_0 m/s. La resistencia del agua es proporcional a la velocidad del torpedo al cuadrado con constante de proporcionalidad $k = 10^{-3}$. Si el torpedo debe impactar al objetivo con al menos la mitad de su velocidad inicial para causar daño, ¿Cuál es la distancia máxima a la que el disparo seguirá teniendo efecto?

Solución: Como la única fuerza actuante es la resistencia del agua, se tiene la ecuación:

$$\frac{dv}{dt} = -10^{-3}v^2,$$

que resolviendo por separación de variables se obtiene

$$\int \frac{dv}{v^2} = 10^{-3} \int dt + C \iff v = \frac{1}{10^{-3}t + C}.$$

Como su velocidad inicial $v(0) = v_0$, entonces, $C = \frac{1}{v_0}$, y por tanto su velocidad es

$$v(t) = \frac{v_0}{10^{-3}v_0t + 1}.$$

Así, suponiendo que su posición inicial está dada por $x(0) = 0$, su posición en cada instante está dada por

$$x(t) = 10^3 \ln(10^{-3}v_0t + 1).$$

Ahora, para calcular la distancia máxima para que el tiro tenga efecto, debemos calcular el momento en que se alcanza la velocidad inicial, esto es, para qué valor de t se tiene $v(t) = \frac{v_0}{2}$.

$$\frac{v_0}{10^{-3}v_0t + 1} = \frac{v_0}{2} \implies 10^{-3}v_0t + 1 = 2 \implies t = \frac{10^3}{v_0}.$$

Calculando la distancia con ese tiempo, se obtiene:

$$x\left(\frac{10^3}{v_0}\right) = 10^3 \ln(2) = 693,14 \text{ metros.}$$

10. Ecuación de Torricelli

La ecuación de Torricelli describe la velocidad a la que el nivel de un fluido cae de un tanque con fugas. Más específicamente, si un tanque tiene un orificio con el área a en su fondo y si $A(y)$ denota el área de sección transversal horizontal $A(y)$ del tanque a profundidad y , entonces la velocidad $\frac{dy}{dt}$ en la que el líquido desciende es dado por la ecuación de Torricelli:

$$A(y) \frac{dy}{dt} = -a\sqrt{2gy}$$

Donde g es la aceleración debida a la gravedad. Véase la figura 2.14.

11. Drenaje de agua de un tanque hemisférico

Un tanque hemisférico como se muestra en la figura 2.13 con un radio de R está inicialmente llena de agua. Una fuga se forma cuando un se perfora un orificio circular de radio r_0 en la parte inferior del tanque.

a) Muestre que la ecuación diferencial que describe la altura y del agua en la El tanque es

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{\pi r_0^2 \sqrt{2gy}}{\pi x^2}$$

b) A partir de la relación $x^2 = R^2 - (y - R)^2 = 2yR - y^2$, se muestra que la solución implícita de esta ecuación se puede encontrar separando las variables.

$$\frac{4}{3}Ry^{3/2} - \frac{2}{5}y^{5/2} = -r_0^2\sqrt{2gt} + C$$

c) Utilice la condición $y = R$ cuando $t = 0$ para encontrar la constante de integración C .

d) Ponga $y = 0$ y resuelva para t en la ecuación encontrada en la parte (b) para determinar el tiempo que toma para drenar toda el agua del tanque para ser

$$t = \frac{14}{15} \frac{R^{5/2}}{r_0^2 \sqrt{2g}}$$

- e) ¿Cuánto tiempo se tarda en drenar un tanque semiesférico de radio 1 pie si un agujero de 1 pulgada se pincha en el fondo?
12. Construye tu propia Clepsydra. Carolina está haciendo un reloj de agua o "clepsydra", como era conocida en la antigüedad. El objetivo es construir un tanque para que el agua caiga a tasa constante. Demuestre que el área de sección transversal $A(h)$ del tanque deseado a la altura h Por encima del fondo del tanque debe ser proporcional a $\sqrt{h}$. Utilice este hecho para determinar la forma exacta $y = f(x)$ del reloj de agua de Carolina con las dimensiones correctas. Investigue en el Internet la gráfica de un Clepsydra.
13. Supongamos que un tanque que contiene líquido tiene un orificio de ventilación en la parte superior y una salida en la parte inferior a través del cual el líquido drena. La ley de Torricelli establece que si, en el momento t segundos después de la apertura de la toma de corriente, la profundidad del líquido es k m y el área superficial del líquido es A m², entonces:

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{k\sqrt{h}}{A}, \text{ donde } K > 0$$

(k en realidad depende de factores tales como la viscosidad del líquido y el área de sección transversal de la salida).

Utilice la ley de Torricelli para un tanque cilíndrico que es, en un principio por completo, y que tiene una altura de 1,6 m y un radio de longitud 0,4 m. Utilice $k = 0,025$. Construir la ecuación diferencial apropiada, resolverla y encontrar el número de segundos que tomará que el tanque se vacíe.

Solución. Un diagrama debe ser dibujado. Ahora

$$\frac{dh}{dt} = \frac{-0,025\sqrt{h}}{\pi \times (0,4)^2}$$

puesto que el área de la superficie es un círculo con área constante $\pi \times (0,4)^2$. Se tiene

$$\frac{dh}{dt} = \frac{-0,025\sqrt{h}}{0,16\pi} \Rightarrow \frac{dh}{dt} = \frac{-5\sqrt{h}}{32\pi},$$

es la ecuación diferencial apropiada. Ahora:

$$\begin{aligned} \frac{dh}{dt} &= \frac{-5\sqrt{h}}{32\pi} \Rightarrow \frac{dt}{dh} = -\frac{32\pi}{5} h^{-1/2} \Rightarrow dt = -\frac{32\pi}{5} h^{-1/2} dh \\ \Rightarrow t &= -\frac{32\pi}{5} \int h^{-1/2} dh + C \Rightarrow t = -\frac{64\pi}{5} \sqrt{h} + C. \end{aligned}$$

Usando la condición de que el tanque inicialmente está repleto; es decir, cuando $t = 0$, $h = 1,6$. Por sustitución se tiene:

$$0 = -\frac{64\pi}{5} \sqrt{1,6} + C \Rightarrow C = \frac{64\pi}{5} \sqrt{1,6}$$

La solución particular para este problema diferencial es

$$t = \frac{64\pi}{5} \sqrt{1,6} - \frac{64\pi}{5} \sqrt{h} \Rightarrow t = \frac{64\pi}{5} [\sqrt{1,6} - \sqrt{h}]$$

Ahora, para que el tanque esté vacío

$$h = 0 \Rightarrow t = \frac{64\pi}{5} \sqrt{1,6} \Rightarrow t \approx 50,9.$$

Se llevará aproximadamente 51 segundos para vaciar este tanque.

14. Un tanque esférico con un radio de 4 *ft* está lleno de gasolina cuando se abre un orificio con un radio de 1 pulgada en la parte inferior, ¿cuánto tiempo se requerirá para que toda la gasolina salga del tanque?

Solución: Representamos el radio en función de y , en cualquier sección horizontal del tanque. Por Pitágoras tenemos que:

$$\begin{aligned}(4-y)^2 + r^2 &= 16 \\ r^2(y) &= 8y - y^2\end{aligned}\quad (1)$$

r es el radio del tanque en la altura y .

$$\begin{aligned}A(y) &= \pi r^2(y) \\ A(y) &= \pi (8y - y^2)\end{aligned}\quad (2)$$

$A(y)$ es el área transversal horizontal del tanque esférico a la altura y . Por Torricelli tenemos que

$$A(y) \frac{dy}{dt} = a\sqrt{2gy}, \quad (3)$$

a : Área del orificio del tanque por donde cae la gasolina.

$$g : 9,8 \frac{m}{s^2} = 32 \frac{ft}{s^2}$$

y : Altura del agua en el tiempo t .

Reemplazando los valores dados en (3) tenemos:

$$\begin{aligned}\pi (8y - y^2) \frac{dy}{dt} &= -a\sqrt{64y} \Rightarrow \pi (8y - y^2) \frac{dy}{dt} = -8a\sqrt{y} \\ \Rightarrow \frac{\pi (8y - y^2)}{\sqrt{y}} dy &= -8adt \Rightarrow \int \frac{\pi (8y - y^2)}{\sqrt{y}} dy = \int (-8a) dt \\ \Rightarrow -\frac{2}{15} y^{3/2} \pi (-40 + 3y) &= -8at + C.\end{aligned}\quad (4)$$

Sabemos que cuando el tanque está lleno la altura es 8 *ft*, y eso ocurre en $t = 0$, reemplazamos estos valores en (4) y despejamos C :

$$-\frac{2}{15} \cdot 8^{3/2} \pi (-40 + 3 \cdot 8) = -8a \cdot 0 + C \Rightarrow C = \frac{256}{15} \sqrt{8} \pi$$

Ahora, la ecuación (4) se transforma en

$$-\frac{2}{15} y^{3/2} \pi (-40 + 3y) = -8at + \frac{256}{15} \sqrt{8} \pi. \quad (5)$$

En el problema se nos pide determinar en cuánto tiempo el tanque se vacía. El tanque se vacía cuando la altura y del agua es igual a 0. Entonces de la ecuación (5) despejamos t cuando $y = 0$, esto es:

$$-\frac{2}{15} (0)^{3/2} \pi (-40 + 3 \cdot 0) = -8at + \frac{256}{15} \sqrt{8} \pi,$$

de donde

$$0 = -8at + \frac{256}{15} \sqrt{8} \pi \Rightarrow t = \frac{64}{15} \frac{\pi \sqrt{2}}{a}, \quad (6)$$

a es el área del orificio por donde cae la gasolina. Por el enunciado del problema sabemos que el radio de a es 1 pulgada = $\frac{1}{12}$ *ft*. Entonces a es:

$$a = \pi \left(\frac{1}{12} \right)^2 \Rightarrow a = \frac{\pi}{144}. \quad (7)$$

Reemplazamos a en (6) para obtener:

$$t = \frac{64}{15} \frac{\pi \sqrt{2}}{\frac{\pi}{144}} \Rightarrow t = \frac{3072}{5} \sqrt{2} \Rightarrow t \approx 868,8928125 \text{ segundos.}$$

15. (El vaciado de un depósito) Un depósito tiene la forma de una superficie de revolución alrededor de un eje vertical con un agujero en la parte inferior. El agujero tiene área A . Encontrar y resolver las ecuaciones de movimiento del líquido situado en el depósito. Los siguientes casos particulares se consideran para el depósito (reservorio):

- forma esférica de radio R ;
- tronco de cono con el radio más pequeño, R_1 , como radio de la base; el mayor radio, R_2 , como radio superior, y la altura es H ;
- tronco de cono con el radio más grande, R_2 , como radio de la base; el menor radio, R_1 , como radio superior, y la altura es H ;
- cono recto con el vértice en la parte inferior;
- forma cilíndrica.

Solución:

De hidrodinámica se conoce la expresión de la velocidad de fuga de un fluido a través de un orificio: $v = k\sqrt{h}$, donde h es la altura de la superficie libre del fluido. La ecuación del radio mediano del depósito es de la forma $r = r(h)$. El volumen de líquido que se escapa durante el tiempo elemental dt se evalúa de la siguiente manera. A través del agujero se fuga un volumen de líquido que es un cilindro con base A y altura vdt ,

$$dV = Avdt = ak\sqrt{h}dt.$$

Por otro lado, el diferencial de volumen que se escapa es $dV = -\pi r^2 dh$. La siguiente expresión es obtenida;

$$Ak\sqrt{h}dt = -\pi r^2 dh.$$

Se obtiene entonces una ecuación diferencial a variables separables

$$dt = -\frac{\pi r^2(h)}{Ak\sqrt{h}}dh.$$

Resolviendo la integral se encuentra:

$$t = -\frac{\pi}{Ak} \int \frac{r^2(h)}{\sqrt{h}} dh + C.$$

De la condición inicial $h(0) = H$ se determina el valor de la constante C .

- En el caso de la forma esférica el radio mediano puede ser escrito como $r^2 = h(2R - h)$, ver figura 2.13. Entonces,

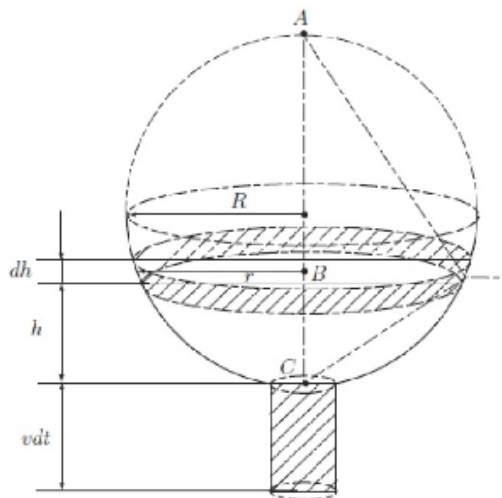


Figura 2.13. Reservorio esférico

$$t = -\frac{\pi}{Ak} \int \frac{h(2R - h)}{\sqrt{h}} dh + C,$$

o también,

$$\begin{aligned} t &= -\frac{\pi}{Ak} \left[2R \int \sqrt{h} dh - \int h^{3/2} dh \right] + C \\ &= -\frac{\pi}{Ak} \left[\frac{4}{3} R h^{3/2} - \frac{2}{5} h^{5/2} \right] + C. \end{aligned}$$

Usando la condición $h(0) = H$ se obtiene que $C = \frac{\pi}{Ak} \left[\frac{4}{3} R h^{3/2} - \frac{2}{5} h^{5/2} \right]$ y por tanto

$$t = \frac{\pi}{Ak} \left[\frac{4}{3} R \left(H^{3/2} - h^{3/2} \right) - \frac{2}{5} \left(H^{5/2} - h^{5/2} \right) \right].$$

Tiempo T para el cual $h(T) = 0$ es $T = \frac{\pi}{Ak} H^{3/2} \left[\frac{4}{3} R - \frac{2}{5} H \right]$. Para $H = R$ (la esfera está completamente llena) resulta $T = \left(\frac{14}{15} \right) \frac{\pi R^{5/2}}{Ak}$.

- b) De la geometría del tronco de cono se tiene: $\frac{r - R_1}{h} = \frac{R_2 - R_1}{H}$, y $r = R_1 + \frac{R_2 - R_1}{H} h$. Ver figura 2.14. Entonces,

$$\frac{r^2}{\sqrt{h}} = \frac{R_1^2}{\sqrt{h}} + \frac{2R_1(R_2 - R_1)}{H} \sqrt{h} + \left(\frac{R_2 - R_1}{H} \right)^2 h^{3/2}.$$

Sustituyendo en la expresión de t , después de calcular la integral se tiene:

$$t = -\frac{\pi}{Ak} \left[2R_1^2 \sqrt{h} + \left(\frac{4}{3} \right) \frac{R_1(R_2 - R_1)}{H} h^{3/2} + \left(\frac{2}{5} \right) \frac{(R_2 - R_1)^2}{H} h^{5/2} \right] + C.$$

Usando la condición $h(0) = H$, se encuentra que

$$C = \frac{\pi}{Ak} \left[2R_1^2 \sqrt{H} + \left(\frac{4}{3} \right) \frac{R_1(R_2 - R_1)}{H} H^{3/2} + \left(\frac{2}{5} \right) \frac{(R_2 - R_1)^2}{H} H^{5/2} \right],$$

y por tanto,

$$t = -\frac{\pi}{Ak} \left[2R_1^2 \left(\sqrt{H} - \sqrt{h} \right) + \frac{4R_1(R_2 - R_1)}{3H} \left(H^{3/2} - h^{3/2} \right) + \frac{2(R_2 - R_1)^2}{5H} \left(H^{5/2} - h^{5/2} \right) \right].$$

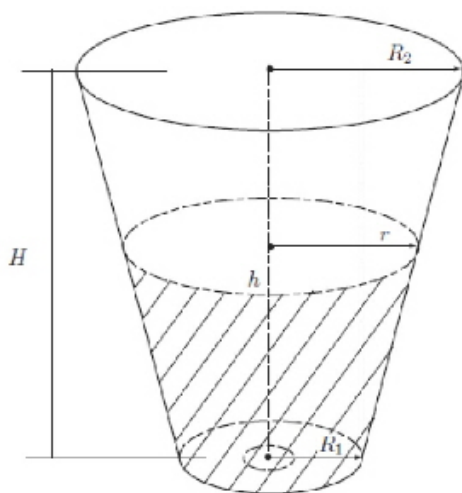


Figura 2.14 Cono truncado con radio mayor como radio base

La condición $h(T) = 0$ implica

$$T = \frac{\pi\sqrt{H}}{Ak} \left[2R_1^2 + \frac{4}{3}R_1(R_2 - R_1) + \frac{2}{5}\frac{(R_2 - R_1)^2}{H} \right].$$

c) De la figura se sigue que, $\frac{r - R_1}{H - h} = \frac{R_2 - R_1}{H}$, de donde $r = R_2 + \frac{R_1 - R_2}{H}h$.

Si en la expresión de r del caso b), R_1 es remplazado por R_2 , se puede encontrar la expresión de r del caso c). Consecuentemente, las expresiones de t y T para el caso c) pueden ser obtenidas de las expresiones correspondientes obtenidas en b), en las cuales R_1 debe ser remplazado por R_2 y R_2 por R_1 ,

$$t = \frac{\pi}{Ak} \left[2R_1^2 (\sqrt{H} - \sqrt{h}) + \frac{4R_2(R_1 - R_2)}{3H} (H^{3/2} - h^{3/2}) + \frac{5}{2} \frac{(R_1 - R_2)^2}{H} (H^{5/2} - h^{5/2}) \right],$$

$$T = \frac{\pi\sqrt{H}}{Ak} \left[2R_2^2 + \frac{4}{3}R_2(R_1 - R_2) + \frac{5}{2}(R_1 - R_2)^2 \right].$$

Comparando las expresiones de T para los casos b) y c) y denotando por T' la expresión en el caso c) resulta:

$$\begin{aligned} T' - T &= \frac{\pi\sqrt{H}}{Ak} \left[2(R_2^2 - R_1^2) + \frac{4}{3}R_2R_1 - \frac{4}{3}R_2^2 - \frac{4}{3}R_1R_2 + \frac{4}{3}R_1^2 + \frac{2}{5}(R_1 - R_2)^2 - \frac{2}{5}(R_2 - R_1)^2 \right] \\ &= \frac{2}{3} \frac{\pi\sqrt{H}}{Ak} (R_2^2 - R_1^2), \text{ o también} \\ T' &= T + \frac{2}{3} \frac{\pi\sqrt{H}}{Ak} (R_2^2 - R_1^2). \end{aligned}$$

d) Es obtenido del caso b), tomando $R_1 = 0$, $R_2 = R$. Por tanto,

$$t = \frac{2\pi R^2}{5AkH^2} (H^{5/2} - h^{5/2}) \quad \text{y} \quad T = \frac{2\pi R^2}{5Ak} \sqrt{H}.$$

e) Es obtenido del caso b), tomando $R_1 = R_2 = R$. Por tanto,

$$t = \frac{2\pi R^2}{Ak} (\sqrt{H} - \sqrt{h})$$

$$T = \frac{2\pi R^2 \sqrt{H}}{Ak}.$$

16. Considere la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = y - x$.

- ¿Cuál es la pendiente del gráfico de la solución en $(0, 1)$, en el punto $(1, 1)$, en el punto $(3, 0)$, en el punto $(0, 0)$ y en el punto (x_0, y_0) ?
- Encontrar todos los puntos donde las tangentes a la curva solución son horizontales.
- Describa la naturaleza de los puntos críticos.

17. Una cierta droga empieza a administrarse intravenosamente a un paciente en el hospital. El fluido conteniendo 5 mg/cm^3 de droga entra a la sangre del paciente a una tasa de $100 \text{ cm}^3/\text{h}$. La droga es absorbida por los tejidos del cuerpo o de otra manera llega al torrente sanguíneo a una tasa proporcional a la cantidad presente, con una tasa constante de $0,4 \text{ cm}^3/\text{h}$.

- Asumiendo que la droga es siempre distribuida uniformemente a través de la sangre, escriba una ecuación diferencial para la cantidad de droga que está presente en la sangre en cualquier tiempo.
- ¿Qué cantidad de fármaco está presente en el torrente sanguíneo después de un largo tiempo?

18. Describa el campo direccional a la ecuación diferencial.

- a) $y' = y - 2$
- b) $y' = 2 - y$
- c) $y' = 2 + y$
- d) $y' = -2 - y$
- e) $y' = (y - 2)^2$
- f) $y' = (y + 2)^2$

19. Grafique el campo direccional para la ecuación diferencial $x'(t) = \frac{2t x(t)}{1 + x(t)}$. Construya el gráfico de las soluciones al problema de valor inicial dado.

- a) $x(0) = 1$
- b) $x(0) = -2$
- c) $x(0) = -0,5$

20. La tasa instantánea de cambio de la temperatura T del café en el tiempo t es proporcional a la diferencia entre la temperatura M del aire y la temperatura T en el tiempo t .

- a) Encontrar el modelo matemático para el problema.
- b) Dado que la temperatura de la habitación es $75^\circ F$ y $k = 0,08$, encontrar la solución de la ecuación diferencial.
- c) La temperatura inicial del café es $200^\circ F$. Encontrar la solución a este problema.

21. Una piscina que contiene 60 000 galones de agua ha sido contaminada por 5 kg de un colorante no tóxico que deja la piel de un nadador un verde poco atractivo. El sistema de filtrado de la piscina puede tomar el agua de la piscina, quitar el tinte, y devolver el agua a la piscina a una velocidad de flujo de 200 gal/min.

- a) Escriba abajo el problema de valor inicial para el proceso de filtrado; sea $q(t)$ la cantidad de colorante en cualquier tiempo t .
- b) Resuelva el problema.
- c) Se ha invitado a varias docenas de amigos a una fiesta en la piscina que está programado para comenzar en 4 horas. También se ha determinado que el efecto del tinte es imperceptible si su concentración es inferior a 0,02 gramos/galón. ¿Es el sistema de filtrado capaz de reducir la concentración de colorante a este nivel dentro de las 4 horas?
- d) Encontrar el tiempo T en el cual la concentración de colorante primero alcanza el valor 0,02 gramos/galón.
- e) Encontrar la tasa de flujo que es suficiente para lograr la concentración de 0,02 gramos/galón. dentro de 4 horas.

22. Dada la siguiente ecuación diferencial, clasifique cada una como una ecuación diferencial ordinaria, ecuación diferencial parcial, dar el orden. Si la ecuación es una ecuación diferencial ordinaria, diga si la ecuación es lineal o no lineal.

a) $\frac{dy}{dx} = 3y + x^2$.

Respuesta:

b) $8 \frac{d^4 y}{dx^4} = x(x - 1)$.

Respuesta:

c) $\frac{\partial N}{\partial t} = \frac{\partial^2 N}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial N}{\partial r} + kN$.

Respuesta:

d) $\frac{dx}{dt} = x^2 - t$.

Respuesta:

e) $(1 + y^2)y'' + ty' + y = e^t$.

Respuesta:

f) $\frac{dy}{dx} + xy^2 = 0$.

Respuesta:

23. Determine si la función $y(t) = \frac{t}{3} + e^{-t}$ es solución de la ecuación diferencial $y^{(4)} + 4y^{(3)} + 3y = t$.

24. Verifique que las funciones dadas son soluciones de la ecuación diferencial.

a) $2t^2y'' + 3ty' - y = 0$, $t > 0$, $y_1(t) = \sqrt{t}$, $y_2(t) = t^{-1}$.

b) $t^2y'' + 5ty' + 4y = 0$, $t > 0$, $y_1(t) = t^{-2}$, $y_2(t) = t^{-2} \ln t$.

25. ¿Para qué valores de r la función $(x - 1)e^{-rx}$ es solución de la ecuación diferencial $y'' - 6y' + 9y = 0$?

26. Determine para qué valores de r la función t^r es solución de la ecuación diferencial $t^2y'' - 4ty' + 4y = 0$.

27. Determine los valores de r para los cuales la ecuación diferencial $y''' - 3y'' + 2y' = 0$ tiene soluciones de la forma $y = e^{rt}$.

28. Considere la ecuación diferencial $y' = x + \sin y$.

a) Una curva solución pasa por el punto $(1, \frac{\pi}{2})$. ¿Cuál es la pendiente de la solución en este punto?

b) Argumenta que toda curva solución es creciente para $x > 1$.

c) ¿Cuál es el límite de la solución cuando x tiende a infinito?

29. ¿Cuál es la velocidad de un proyectil a una altitud de 8000 metros después de haber sido lanzado directamente hacia arriba con una velocidad inicial de 1000 m/s?

30. Un cuerpo de masa m se lanza verticalmente hacia arriba, en el aire, con una velocidad inicial v_0 . Suponemos que el cuerpo no encuentra resistencia del aire. Hallar:

a) la ecuación del movimiento;

b) una expresión para la velocidad del cuerpo en un momento t .

c) el instante t_m en el cual llega el cuerpo a su altura máxima;

d) una expresión para la posición del cuerpo en un instante t ,

e) la altura máxima alcanzada por el cuerpo.

31. Un cuerpo de masa m es lanzado verticalmente hacia arriba con una velocidad v_0 . Si la resistencia del aire es proporcional al cuadrado de la velocidad, encontrar la ecuación del movimiento del cuerpo.

32. Un banco paga interés a una tasa anual de 4% capitalizada continuamente. Si se abre una cuenta con \$5000, ¿cuál será el saldo al final de 5 años?

33. El número de bacterias de cierto cultivo crece a una razón proporcional al número de bacterias presentes. Si inicialmente se encuentran presentes en el cultivo 10 000 bacterias y 10 minutos más tarde se encuentran 13 000 bacterias, ¿cuántas bacterias estarán presentes después de una hora?

34. En el movimiento de un objeto a través de un cierto medio (aire a ciertas presiones por ejemplo), el medio efectúa una fuerza de resistencia proporcional al cuadrado de la velocidad del objeto móvil. Supóngase que el cuerpo cae por la acción de la gravedad a través de tal medio. Si t representa el tiempo y v la velocidad hacia abajo, y g es la aceleración de la gravedad y w el peso del cuerpo, usando la ley de Newton, fuerza igual a masa por aceleración, deducir que la ecuación diferencial del movimiento es $\frac{w}{g} \frac{dv}{dt} = w - kv^2$, donde kv^2 es la fuerza de resistencia del medio. Resolver este problema con la condición inicial de que $v = v_0$ cuando $t = 0$. (Introducir además la constante $a^2 = \frac{w}{k}$).
35. Una sustancia radiactiva se desintegra a una razón proporcional a la cantidad presente. Su vida media se define como el tiempo necesario para que el 50 % de una cantidad dada se desintegre. Deducir una fórmula en términos del tiempo para la cantidad de la sustancia que queda, la cantidad original y la vida media de la sustancia.
36. Un circuito RC tiene una *fem* de 5 voltios, una resistencia de 10 ohmios, una capacitancia de 10^{-2} faradios y una carga inicial de 5 culombios en el condensador. Hallar:
- la corriente transitoria;
 - la corriente en condiciones estables.
37. Cuando un rayo vertical de luz pasa a través de una sustancia transparente, la rapidez con que su intensidad I disminuye es proporcional a $I(t)$, donde t representa el espesor del medio, expresado en pies. En agua de mar límpida, la intensidad a 3 pies bajo la superficie es un 25 % de la intensidad inicial I_0 del rayo incidente. ¿Cuál es la intensidad del rayo a 15 pies bajo la superficie?
38. A un circuito en serie, en el cual la inductancia es de 0.1 henrios y la resistencia es de 50 ohmios, se le aplica una fuerza electromotriz de 30 voltios. Encontrar la corriente $I(t)$ si $I(0) = 0$. Determinar el comportamiento de la corriente para valores grandes del tiempo.
39. Una barra metálica a una temperatura de 100°C se pone en un cuarto que está a una temperatura de 32°C . Si después de 30 minutos la temperatura de la barra es de 50°C , hallar:
- el tiempo que transcurrirá para que la temperatura en la barra sea de 20°C .
 - la temperatura de la barra después de 10 minutos.

Nota. La ley de Newton sobre el enfriamiento establece que la razón de cambio respecto al tiempo de la temperatura de un cuerpo es proporcional a la diferencia de temperatura entre el cuerpo y el medio ambiente.

40. Una esfera de masa m cae en un muelle vertical como se muestra en la Figura 7. La esfera hace contacto con el resorte y el resorte se comprime. La fase de compresión termina cuando la velocidad de la esfera es cero. La siguiente fase es la fase de restitución cuando el resorte está en expansión y la esfera se mueve hacia arriba. Al final de la fase de restitución no es la separación de la esfera. Encontrar y resolver la ecuación de movimiento para la esfera en contacto con el resorte.

Solución

El eje x seleccionado hacia abajo como se muestra en la figura. En el momento $t = 0$ se supone que la esfera se pone en contacto con el resorte y tiene la velocidad $v(t = 0) = v(0) = v_0$. Usando la segunda ley de Newton, la ecuación de movimiento de la esfera en contacto con el resorte es:

$$ma = G + F_e \quad \text{o} \quad m \frac{d^2x}{dt^2} = mg - kx$$

La aceleración de la esfera es $a = \frac{d^2x}{dt^2}$, donde x es el desplazamiento lineal.

El peso de la esfera es $G = mg$, Donde g es la aceleración de la gravedad.

La fuerza elástica de contacto es $F_e = kx$, donde k es la constante elástica del resorte. Las condiciones iniciales son: $x(0) = 0$ y $\frac{dx}{dt} = v_0$.

Con la notación $\frac{k}{m} = \omega^2$, $\omega > 0$, la ecuación $m \frac{d^2 x}{dt^2} = mg - kx$ se transforma en $\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega^2 x = g$. Asumamos que la solución de dicha ecuación tiene la forma

$$x = a \cos(\omega t - \varphi_0) + b.$$

Entonces

$$\frac{dx}{dt} = -a\omega \sin(\omega t - \varphi_0) \quad \text{y} \quad \frac{d^2 x}{dt^2} = -a\omega^2 \cos(\omega t - \varphi_0).$$

Sustituyendo en $\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega^2 x = g$ se sigue que

$$-a\omega^2 \cos(\omega t - \varphi_0) + \omega^2 [a \cos(\omega t - \varphi_0) + b] = g,$$

la constante b es entonces obtenida: $b = \frac{g}{\omega^2}$.

Usando las condiciones iniciales ($x(0) = 0$ y $\frac{dx}{dt} = v_0$) las siguientes expresiones son obtenidas:

$$\begin{aligned} x(0) &= a \cos(-\varphi_0) + b = a \cos(\varphi_0) + b = 0, \\ \frac{dx}{dt}(0) &= -a\omega \sin(-\varphi_0) = a\omega \sin(\varphi_0) = v_0, \end{aligned}$$

o también:

$$a \cos(\varphi_0) = -b = -\frac{g}{\omega^2} \quad \text{y} \quad a \sin(\varphi_0) = \frac{v_0}{\omega}.$$

Se obtiene:

$$a^2 \cos^2(\varphi_0) + a^2 \sin^2(\varphi_0) = a^2 (\cos^2(\varphi_0) + \sin^2(\varphi_0)) = a^2 = \frac{g^2}{\omega^4} + \frac{v_0^2}{\omega^2},$$

por tanto $a = \sqrt{\frac{g^2}{\omega^4} + \frac{v_0^2}{\omega^2}}$ y $\tan \varphi_0 = -\frac{v_0 \omega}{g}$ o también $\varphi_0 = -\arctan\left(\frac{v_0 \omega}{g}\right)$.

La ecuación para el desplazamiento de la esfera es:

$$x - \frac{g}{\omega^2} = \left(\sqrt{\frac{g^2}{\omega^4} + \frac{v_0^2}{\omega^2}} \right) \cos\left(\omega t + \arctan\left(\frac{v_0 \omega}{g}\right)\right).$$

Si la esfera puede ser conectada al resorte, él puede oscilar alrededor de la posición $x = \frac{g}{\omega^2}$.

La esfera alcanza la máxima posición en el eje x en el instante $t = t_1$ cuando la velocidad es cero; es decir, $\frac{dx}{dt}(t_1) = 0$

$$\frac{dx}{dt}(t_1) = -a\omega \sin(\omega t_1 - \varphi_0) = 0 \implies \omega t_1 - \varphi_0 = \pi$$

o también

$$t_1 = \frac{\pi}{\omega} + \frac{1}{\omega} \varphi_0 = \frac{\pi}{\omega} - \frac{1}{\omega} \arctan\left(\frac{v_0 \omega}{g}\right)$$

En el momento $t = t_2 = 2t_1$, la esfera alcanza de nuevo la referencia O . En este momento, la esfera se separa y se mueve hacia arriba, y el muelle se comprime. La velocidad de la esfera en $t = t_2$ es

$$\frac{dx}{dt}(t_2) = a\omega \sin(\omega t_2 - \varphi_0) = -v_0.$$

El tiempo de contacto entre la esfera y el resorte es:

$$t_2 = 2t_1 = \frac{2\pi}{\omega} - \frac{2}{\omega} \arctan\left(\frac{v_0 \omega}{g}\right).$$

La variación de la velocidad es:

$$\Delta v = \frac{dx}{dt}(0) - \frac{dx}{dt}(t_2) = v_0 - (-v_0) = 2v_0.$$

El desplazamiento en t_1

$$x(t_1) = a \cos(\omega t_1 - \varphi_0) + b = a + b = \sqrt{\frac{g^2}{\omega^4} + \frac{v_0^2}{\omega^2}} + \frac{g}{\omega^2},$$

y el desplazamiento relativo es:

$$\lambda = x(0) - x(t_1) = 0 - x(t_1) = -\left(\frac{g}{\omega^2} + \sqrt{\frac{g^2}{\omega^4} + \frac{v_0^2}{\omega^2}}\right).$$

41. Problema

- a) Para cada constante k considere la curva definida por $x^2 - y^2 = k$. Encuentre la familia de curvas ortogonales a la familia anterior. Bosqueje la situación.
 - b) Haga lo mismo que en [a)] para la familia definida por $xy = k$; y por $y = e^{kx}$.
 - c) Encuentre la familia de curvas ortogonales a la familia de elipses $x^2 + 2y^2 = y + b$ donde b es constante.
 - d) Determine la constante k de modo que las parábolas $y = ax^2 + k$ sean las trayectorias ortogonales de la familia de elipses $x^2 + 2y^2 = y + b$; a y b son parámetros.
 - e) Dada una familia de curvas que pasan por el punto $(1, 2)$ y cuyas pendientes son inversamente proporcionales a la abscisa del punto (factor de proporcionalidad), encuentre la familia de curvas ortogonales a la dada. En particular calcule y determine la curva que pasa por el punto $(1, 2)$.
42. Suponga que la tasa de crecimiento de una especie de bacteria es constante. Si en un inicio se estima que hay 1500 bacterias, y luego en una hora existen 2000. ¿Cuántas habrá luego de seis horas? ¿En cuántas horas la población se triplicará?
43. Una población inicial de bacterias tiene tasa de crecimiento igual a una constante k_1 . Luego de T horas las bacterias se colocan en un cultivo diferente de modo que la población crece ahora a una tasa constante k_2 . Determine la población para cualquier tiempo t .
44. (Curva de persecución). Determinar la curva de persecución de un barco A que persigue a un barco B. Suponga que este último lo hace en línea recta. Suponga, además conocidas la distancia inicial entre los barcos A y B y sus respectivas velocidades iniciales.
45. La ley de enfriamiento de Newton establece que en un cuerpo que se está enfriando, la rapidez con que cambia la temperatura $T(t)$ es proporcional a la diferencia entre la temperatura del cuerpo y la temperatura del medio que lo rodea (que asumiremos constante, aunque no necesariamente).
- La temperatura de un motor en el momento en que se apaga es de $200^\circ C$. Después de 10 minutos, la temperatura de la superficie del motor es de $180^\circ C$. Suponga que la temperatura ambiente es de $30^\circ C$ y que la temperatura del motor viene dada por la de su superficie.
- a) ¿Cuánto tiempo tomará que la temperatura de la superficie del motor baje a $40^\circ C$? Respuesta: $\frac{10 \ln(17)}{\ln(17) - \ln(15)} \text{ min.}$
 - b) Para una temperatura dada T entre $200^\circ C$ y $30^\circ C$, sea $t(T)$ el tiempo necesario para que el motor se enfríe de $200^\circ C$ a T . Encuentre una fórmula para $t(T)$ en términos de T y grafique la función.
 - c) ¿En cuánto tiempo la temperatura del motor se iguala a la temperatura ambiente?