Capítulo 1

Ecuaciones diferenciales

1.1. Generalidades acerca de las ecuaciones diferenciales

Sea $y = f(x)$ una función real definida en un intervalo abierto I. Supongamos que f es derivable hasta el orden n al menos y que, en todo punto x de I, existe entre y y sus n primeras derivadas una relación de la forma

$$\Phi\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \cdots, \frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0. \tag{1.1}$$

La ecuación (1.1) en la cual la función $y = f(x)$ es considerada como la incógnita, es llamada *ecuación diferencial ordinaria de orden n*. Claro está que, la misma expresión se aplica a toda ecuación que puede reducirse a dicha forma.

Un caso particular importante es aquel en el cual la ecuación diferencial se escribe como

$$\frac{d^ny}{dx^n} = \Psi\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \cdots, \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right), \tag{1.2}$$

la cual se dice que está dada en *forma normal*.

Las siguientes ecuaciones son algunos ejemplos de ecuaciones diferenciales ordinarias que estudiaremos más adelante.

1. $m\dfrac{d^2x}{dt^2} + kx = F(t)$, es la ecuación diferencial que gobierna el movimiento de una masa m que está sujeta a un muelle helicoidal que suministra una fuerza de recuperación proporcional al desplazamiento x, con constante de proporcionalidad k.

2. $L\dfrac{d^2i}{dt^2} + \dfrac{1}{C}i = \dfrac{dE}{dt}$, ecuación diferencial que gobierna la corriente $i\,(t)$ en un circuito eléctrico compuesto por un inductor con inductancia L, un capacitor con capacitancia C y una fuente de voltaje $E\,(t)$, donde t es el tiempo.

3. $\dfrac{d^2\theta}{dt^2} + \dfrac{g}{L}\operatorname{sen}\theta = 0$, ecuación diferencial que gobierna el movimiento angular $\theta\,(t)$ de un péndulo de longitud L bajo la acción de la gravedad, donde g es la aceleración de la gravedad y t es el tiempo.

4. $\dfrac{dx}{dt} = cx$, ecuación diferencial que gobierna la población $x(t)$ de una sola especie, donde t es el tiempo y c es una tasa constante neta de natalidad / mortalidad.

5. $\dfrac{d^2y}{dx^2} = C\sqrt{1 + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2}$, ecuación diferencial que gobierna la forma de un cable o cuerda flexible, colgando bajo la acción de la gravedad, donde $y(x)$ es la deflexión y C es una constante que depende de la densidad de masa del cable y la tensión en el punto medio $x = 0$.

6. $EI\dfrac{d^4y}{dx^4} = -\omega\,(x)$, ecuación diferencial que gobierna la deflexión $y(x)$ de una viga sometida a una carga $\omega\,(x)$, donde E e I son constantes físicas del material de la viga y de la sección transversal, respectivamente.

Observación 1.1 *La ecuación diferencial (1.1), recibe el calificativo de ordinaria para indicar que la función incógnita es función de una sola variable. Si la función incógnita es función de varias variables, la ecuación diferencial se denomina en derivadas parciales.*

Algunas ecuaciones diferenciales parciales representativas e importantes son las siguientes:

1. $\alpha^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial u}{\partial t}$, es la ecuación del calor, que rige la variación de la distribución de la temperatura en función del tiempo $u(x,t)$ en una varilla o placa de una dimensión; x localiza el punto bajo consideración dentro del material, t es el tiempo y α^2 es una propiedad del material llamada difusividad.

2. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$, es la ecuación de Laplace, que gobierna la distribución de la temperatura de estado estacionario $u(x,y,z)$ dentro de un cuerpo tridimensional; x, y, z son las coordenadas del punto dentro del material.

3. $c^2 \left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}$, es la ecuación de onda, que gobierna la deflección $u\,(x,y,z)$ de una membrana vibrante tal como una membrana de tambor.

4. $\dfrac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 2\dfrac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \dfrac{\partial^4 u}{\partial y^4} = 0$, es la ecuación biharmónica, que gobierna la función de corriente $u(x,y)$ en el caso de un movimiento lento (de arrastre) de un fluido viscoso tal como una película de pintura húmeda.

5. $\dfrac{\partial v}{\partial s} + \dfrac{\partial v}{\partial t} = v$

6. $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial u}{\partial y}$

7. $\dfrac{\partial u}{\partial t} = c^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

1.1.1. Problemas de valores iniciales y problemas de valor en la frontera

Además de satisfacer la ecuación diferencial, la función desconocida se somete a menudo a condiciones en uno o más puntos del intervalo considerado. Las condiciones especificadas en un punto único (a menudo el punto extremo izquierdo del intervalo), se llaman condiciones iniciales, y la ecuación diferencial junto con esas condiciones iniciales se llama un **problema de valor inicial**. Las condiciones especificadas en ambos extremos se denominan condiciones de contorno o de frontera, y las ecuaciones diferenciales junto con las condiciones de contorno se llaman problemas de valor límite. Para los problemas de valores iniciales, la variable independiente suele ser el tiempo, aunque no necesariamente, y para los problemas de valores límite la variable independiente suele ser una variable espacial.

Ejemplo 1.1 *Movimiento en línea recta de una masa. Consideremos el problema de predecir el movimiento en línea recta de un cuerpo de masa m sometido a una fuerza $F(t)$. De acuerdo con la segunda ley de movimiento de Newton, la ecuación diferencial que gobierna el desplazamiento $x(t)$ es $m\ x'' = F(t)$. Además de la ecuación diferencial, supongamos que queremos imponer las condiciones $x(0) = 0$ y $x'(0) = v_0$; es decir, el desplazamiento y la velocidad inicial son 0 y v_0, respectivamente. Entonces la formulación completa del problema es el problema de valor inicial*

$$\begin{cases} m\ x''(t) = F(t), & 0 \leq t \leq +\infty \\ x(0) = 0, & x'(0) = v_0. \end{cases} \tag{1.3}$$

Esto es, $x(t)$ debe satisfacer la ecuación diferencial $m\ x''(t) = F(t)$, en el intervalo $0 \leq t \leq +\infty$ y las condiciones iniciales $x(0) = 0$ y $x'(0) = v_0$.

Ejemplo 1.2 *Deflexión de una viga en voladizo cargada. Consideremos la deflexión $y(x)$ de una viga en voladizo de longitud L, bajo una carga $\omega(x)$ $\frac{N}{m^2}$. Usando la llamada teoría de la viga de Euler, se encuentra que el problema gobernante es el siguiente:*

$$\begin{cases} EI\, y''' = -\omega(x), \quad 0 \leq x \leq L \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y''(L) = 0, \quad y'''(L) = 0, \end{cases} \tag{1.4}$$

donde E e I son constantes físicas conocidas.

Las condiciones adjuntas son condiciones de contorno porque algunas se especifican en un extremo, y otras en el otro extremo, y (1.4) es por lo tanto un problema de valor límite. La significación física de las condiciones de contorno es la siguiente: $y(0) = 0$ es verdadera simplemente en virtud de nuestra ubicación elegida del origen del sistema de coordenadas x, y; $y'(0) = 0$, ya que la viga está en voladizo fuera de la pared, de modo que su pendiente en $x = 0$ es cero; $y''(L) = 0$ y $y'''(L) = 0$ porque el momento y la fuerza de cizallamiento, respectivamente, son cero al final (extremo) de la viga.

Nota. Una ecuación diferencial es una ecuación que implica derivadas. Al tratar un problema de aplicación, se debe empezar por etiquetar todas las cantidades y dibujar una figura o diagrama. También es necesario identificar las variables dependientes e independientes.

1.1.2. Solución de una ecuación diferencial

Consideraremos por simplicidad la ecuación diferencial de primer orden en su forma normal: $y' = f(x, y)$. Rara vez podemos encontrar su solución en forma explícita, es decir como $y = \varphi(x)$. Diremos que la ecuación $\Phi(x, y) = 0$, define una solución en forma implícita si $\Phi(x, y)$ es una función conocida.

¿Cómo saber que la ecuación $\Phi(x, y) = 0$ define una solución $y = \varphi(x)$ de la ecuación $y' = f(x, y)$? Asumiendo que se cumplen las condiciones del teorema de la función implícita, diferenciamos ambos miembros de la ecuación $\Phi(x, y) = 0$ con respecto a x :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} y' = 0. \tag{1.5}$$

De la ecuación $y' = f(x, y)$ obtenemos:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} f(x, y) = 0. \tag{1.6}$$

Por lo tanto, si la función $y = \varphi(x)$ es una solución de $y' = f(x, y)$, entonces la función $\Phi(x, y) = y - \varphi(x)$ debe satisfacer (1.6). En efecto, en este caso, tenemos $\dfrac{\partial \Phi}{\partial x} = -\varphi'(x)$ y $\dfrac{\partial \Phi}{\partial y} = 1.$

Una ecuación diferencial ordinaria puede ser dada ya sea para un conjunto limitado de valores de la variable independiente o para todos los valores reales. Restricciones, si las hay, pueden ser impuestas de manera arbitraria o debido a las limitaciones relativas a la ecuación. Tales restricciones pueden ser causadas por condiciones impuestas a la ecuación o por el hecho de que las funciones que participan en la ecuación tienen dominios limitados. Por otra parte, si una ecuación diferencial ordinaria se declaró sin restricciones explícitas a la variable independiente, se supone que todos los valores de la variable independiente están permitidos con excepción de los valores para los que la ecuación no tiene sentido.

Ejemplo 1.3 *La relación*

$$\ln(y) + y^2 - \int_0^x e^{-u^2} du = 0, \ \ con\ y > 0,$$

es considerada una solución en forma implícita de la ecuación diferencial $\left(1 + 2y^2\right) y' - ye^{-x^2} = 0$,o también $y' = \frac{y}{1+2y^2} e^{-x^2}$.

Esto puede ser visto derivando la relación dada implícitamente con respecto a x. Esto conduce a

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\left[\ln y + y^2 - \int_0^x e^{-u^2} du\right] &= 0 \Longleftrightarrow \frac{1}{y} y' + 2yy' - e^{-x^2} = 0 \Longleftrightarrow \left(\frac{1 + 2y^2}{y}\right) y' = e^{-x^2} \\ &\Longrightarrow \ y' = \frac{y}{1 + 2y^2} e^{-x^2}. \end{aligned}$$

Ejemplo 1.4 *La función $y(x)$ que está definida implícitamente por la ecuación $x^2 + 2y^2 = 4$ es una solución de la ecuación diferencial $x + 2yy' = 0$ en el intervalo $]-2, 2[$ sujeta a $y(\pm 2) = 0$.*

La relación implícita $x^2 + 2y^2 = 4$ contiene las dos soluciones explícitas

$$y(x) = \sqrt{2 - \frac{1}{2}x^2} \quad y \quad y(x) = -\sqrt{2 - \frac{1}{2}x^2} \text{ para } -2 < x < 2,$$

que corresponden gráficamente a dos semielipses. En efecto, si reescribimos la ecuación diferencial $x + 2yy' = 0$ en la forma normal $y' = -\dfrac{x}{2y}$, entonces deberíamos excluir $y = 0$ de la consideración. Puesto que $x = \pm 2$ corresponde a $y = 0$ en ambas soluciones, debemos excluir estos puntos del dominio de las soluciones explícitas. Note que la ecuación diferencial $x+2yy' = 0$ tiene infinitas soluciones: $x^2+2y^2 = C$, con $|x| \leq C$, donde C es una constante arbitraria positiva.

MATLAB dispone del módulo **Symbolic Math Toolbox,** que permite manejar el cálculo matemático simbólico con mucha facilidad. Por ejemplo, para graficar la función $y(x)$ en el intervalo $[-2, 2]$ use los comandos y la gráfica aparece en la figura 1.1.

```
>> f='(2-0.5*x^2)^0.5'
>> fplot(f,[-2,2])
>> grid on
```

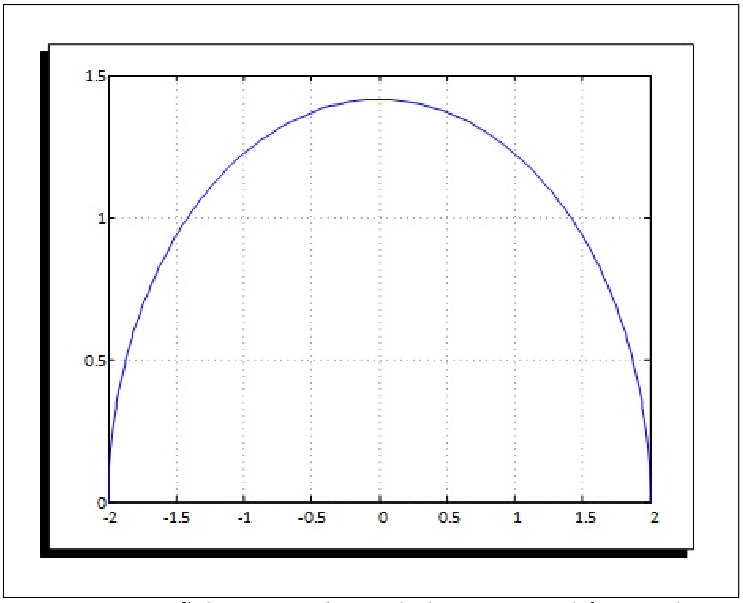

Figura 1.1. Solución explícita de la ecuación diferencial $x + 2yy' = 0$.

A continuación, se observa que una ecuación diferencial puede (y generalmente) tienen un número infinito de soluciones. Un conjunto de soluciones de $y' = f(x, y)$ que depende de una constante arbitraria C merece un nombre especial.

Criterion 1.2 *Una función $y = \varphi(x, C)$ es llamada la solución general de la ecuación diferencial $y' = f(x, y)$ en algún dominio bidimensional Ω si para todo punto $(x, y) \in \Omega$ existe un valor de la constante C tal que la función $y = \varphi(x, C)$ satisface la ecuación $y' = f(x, y)$. Una solución de esta ecuación diferencial puede ser definida implícitamente:*

$$\Phi(x, y, C) = 0 \text{ o también } \psi(x, y) = C.$$

En este caso, $\Phi(x, y, C)$ es llamada la integral general, y $\psi(x, y)$ es referida como la función potencial de la ecuación dada $y' = f(x, y)$. A la constante C se puede dar cualquier valor en un intervalo adecuado. Puesto que C puede variar de un problema a otro, a menudo se llama un parámetro para distinguirla de las principales variables x e y. Por lo tanto, la ecuación $\Phi(x, y, C) = 0$ define una familia uniparamétrica de curvas sin intersecciones. Gráficamente, ella representa una familia de curvas solución en el plano xy, cada elemento de los cuales está asociado con un valor particular de C. La solución general corresponde a toda la familia de curvas que la ecuación define.

Como era de esperar, la afirmación inversa es verdadera: las curvas de una familia uniparamétrica son las integrales de alguna ecuación diferencial de primer orden. Antes bien, sea la familia de curvas define por la ecuación $\Phi(x, y, C) = 0$, con una función suave Φ. Diferenciando con respecto a x conduce a una relación de la forma $F(x.y.y', C) = 0$. Eliminando C de estas dos ecuaciones, obtenemos la correspondiente ecuación diferencial.

Ejemplo 1.5 *Consideremos la familia uniparamétrica de curvas* $x^2 + y^2 + Cy = 0$ *o también* $C = -\dfrac{x^2+y^2}{y}$ *(con* $y \neq 0$*).*

Diferenciando, tenemos $2x + 2yy' + Cy' = 0$*. Remplazando* $C = -\dfrac{x^2+y^2}{y}$ *en la última ecuación, obtenemos la ecuación diferencial*

$$2x + 2yy' - y'\left(\frac{x^2+y^2}{y}\right) = 0 \quad o\ también\ y' = \frac{2xy}{x^2-y^2}.$$

Para graficar la familia uniparamétrica de curvas, se lo puede hacer con el simple comando **ezplot** de la siguiente forma:

```
>> syms x y
>> for C = -5:5
>>  f=x^2+y^2+C*y;
>>  ezplot(f);
>>  hold on
>> end
```

La grafica de la familia uniparamétrica de curvas la muestra la figura 1.2.

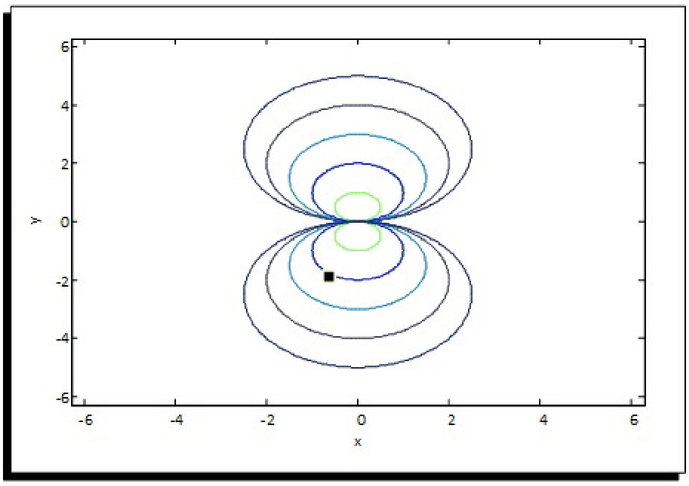

Figura 1.2 Familia de curvas uniparamétricas de la ecuación diferencial $y' = \frac{2xy}{x^2-y^2}$.

Ejemplo 1.6 *Para una constante arbitraria* C*, mostrar que la función* $y = Cx + \dfrac{C}{\sqrt{1+C^2}}$ *es la solución de la ecuación diferencial no lineal* $y - xy' = \dfrac{y'}{\sqrt{1+(y')^2}}$.

Tomando la derivada de y vemos que $y' = C$. Sustituyendo $y = Cx + \dfrac{C}{\sqrt{1+C^2}}$ y $y' = C$ en la ecuación diferencial se obtiene

$$Cx + \frac{C}{\sqrt{1+C^2}} - xC = \frac{C}{\sqrt{1+C^2}}.$$

Esta identidad prueba que la función es una solución de la ecuación diferencial dada. Dando a C cualquier valor, por ejemplo $C = 1$, obtenemos la solución particular $y = x + \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

A veces la integración de $y' = f(x, y)$ conduce a una familia de curvas integrales que dependen de una constante arbitraria C en forma paramétrica, a saber,

$$x = \mu(t, C), \quad y = \upsilon(t, C).$$

Esta familia de curvas integrales es llamada la solución general en forma paramétrica.

Ejemplo 1.7 *Mostrar que la función $y = \varphi(x)$ en forma paramétrica, $y(t) = te^{-t}$, $x(t) = e^t$, es una solución de la ecuación diferencial $x^2 y' = 1 - xy$.*

Solución. Las derivadas de x y y con respecto a t son:

$$\frac{dx}{dt} = e^t \qquad y \qquad \frac{dy}{dt} = e^{-t}\ (1-t)\,,\ \textit{respectivamente.}$$

Por tanto,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{e^{-t}\ (1-t)}{e^t} = e^{-2t}\ (1-t) = e^{-2t} - te^{-2t} = \frac{1}{x^2} - \frac{y}{x} = \frac{1-xy}{x^2},$$

puesto que $x^{-2} = e^{-2t}$ y $\dfrac{y}{x} = te^{-2t}$. A continuación se muestra una solución de la ecuación diferencial $x^2 y' = 1 - xy$.

Los siguientes comandos grafican la solución en el intervalo $[0, 2]$ y se muestra en la figura 1.3.

```
>> t = linspace(0,1,20);
>> x = t.*exp(-t);
>> y = t.*exp(t);
>> plot(x,y);
```

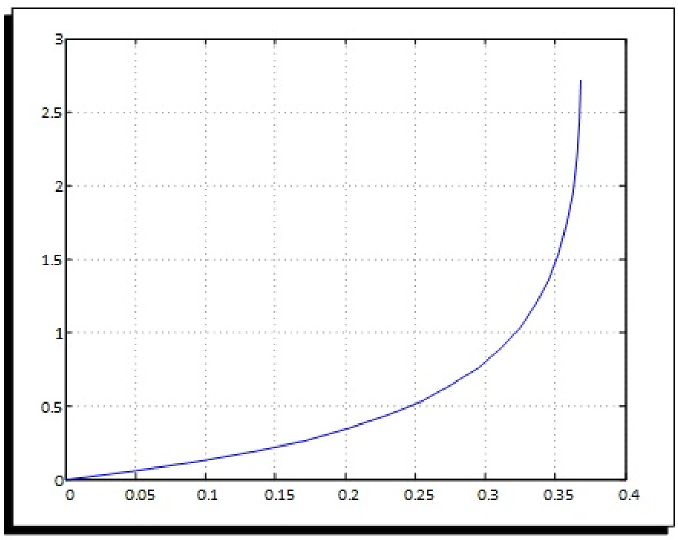

Figura 1.3 Gráfica de la solución paramétrica $y(t) = te^{-t}$, $x(t) = e^t$.

En muchos casos, es más conveniente buscar una solución en forma paramétrica, especialmente cuando la función pendiente es una razón de dos funciones: $y' = \dfrac{P(x,y)}{Q(x,y)}$. Entonces, introduciendo una nueva variable independiente t, podemos reescribir la ecuación simple como un sistema de dos ecuaciones:

$$\frac{dx}{dt} = Q(x,y), \qquad \frac{dy}{dt} = P(x,y).$$

Observación 1.3 *Encontrar soluciones de ecuaciones diferenciales es una tarea complicada la mayor parte de las veces. Verificar si una función es o no solución es, sin embargo, muy sencillo: basta derivar, sustituir en la ecuación y comprobar si se obtiene una identidad o no para todos los valores posibles de la variable independiente para los que la ecuación tiene sentido. Por ejemplo, considere la ecuación diferencial* $x'' - 2x' + x = 0$.

Comprobar si la función $x(t) = (C_1 + C_2 t)e^t$ es o no solución es muy sencillo. En efecto, calculamos las derivadas presentes en la ecuación $x'(t) = (3 + 2t)e^t$ y $x''(t) = (5 + 2t)e^t$, y sustituímos en la ecuación:

$$x''(t) - 2x'(t) + x(t) = (5 + 2t)e^t - 2(3 + 2t)e^t + (1 + 2t)e^t = [(5 - 6 + 1) + (2 - 4 + 2)t]e^t = 0,$$

para todo t. En consecuencia, la función $x(t) = (1 + 2t)e^t$ es solución de la ecuación dada.

Matlab permite encontrar las soluciones de una ecuación diferencial con la simple utilización de un comando, por ejemplo para encontrar la solución de la ecuación diferencial $x'' - 2x' + x = 0$ utilice los siguientes comandos:

```
>> dsolve('D2x-2*Dx+x=0')
>> ans =C1*exp(t) + C2*t*exp(t)
```

Con el siguiente código en MATLAB se grafica las curvas integrales de la ecuación diferencial que se muestra en la figura 1.4, esta es una solución explícita de la ecuación y la podemos escribir explícitamente en función de t.

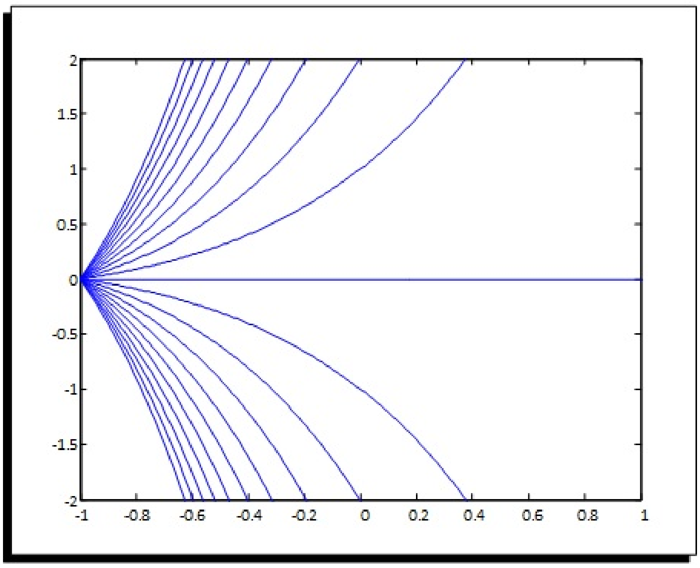

Figura 1.4 Curvas integrales de la ecuación diferencial
$x'' - 2x' + x = 0$.

Hay soluciones en las que sin embargo esto es imposible. Consideremos, por ejemplo, la ecuación

$$\frac{dx}{dt} = \frac{x}{x^2 + 1}.$$

Resulta que cualquier función $x(t)$, que verifique $\ln|x(t)|+\dfrac{x^2(t)}{2}=t+C$, cualquiera sea la constante C es una solución de la ecuación. Para comprobarlo procedemos de la siguiente forma: Escribimos $g(t,x)=\ln|x(t)|+\dfrac{x^2(t)}{2}-t-C$, de modo que la ecuación $\ln|x(t)|+\dfrac{x^2(t)}{2}=t+C$ es equivalente a: $g(t,x(t))=0$.

Esto es una ecuación en t y x que bajo ciertas condiciones permite definir x como función de t en algún intervalo de la recta hay un teorema importante en matemáticas, el Teorema de la función implícita, que establece dichas condiciones e intervalos. Es como si pudiéramos despejar x como función de t para ciertos valores de t. En algunos casos, de hecho, se puede despejar x explícitamente. Por ejemplo, si $g(t,x)=x^2-t$ entonces la ecuación $g(t,x)=0$ define dos funciones de t : $x(t)=\sqrt{t}$ y $x(t)=-\sqrt{t}$. Nótese que $g(t,x)=x^2-t$ es continua y derivable de cualquier orden en todos los puntos del plano, pero las dos funciones que define la ecuación $x^2-t=0$ solo están definidas para $t\geq 0$ y son derivables para $t>0$. La mayoría de las veces, sin embargo, no es posible despejar x explícitamente. Se dice entonces que $g(t,x)=0$ define una función $x(t)$ implícitamente (y también, claro, una función $t(x)$ implícitamente. Los papeles de las variables t y x en $g(t,x)$ son intercambiables).

Aún cuando no podamos despejar explícitamente x como función de t en $g(t,x)=0$, podemos saber si la función o funciones $x(t)$ definidas implícitamete por esta ecuación son o no soluciones de una determinada ecuación. Basta, para ello, aplicar cualquiera de los dos siguientes métodos que son equivalentes:

1. Derivar implícitamente: Por ejemplo, en nuestro caso, derivar implícitamente en $g(t,x)=\ln|x(t)|+\dfrac{x^2(t)}{2}-t-C=0$ o derivar ambas partes de la ecuación $\ln|x(t)|+\dfrac{x^2(t)}{2}=t+C$ viendo x como una función de t. Así, derivando implícitamente en $\ln|x(t)|+\dfrac{x^2(t)}{2}=t+C$ obtenemos:

$$\frac{x'(t)}{x(t)}+x(t)x'(t)=1$$

y para todos los valores de t :

$$x'(t)+x^2(t)x'(t)=x(t))\Longrightarrow x'(t)\left[1+x^2(t)\right]=x(t))\Longrightarrow x'(t)=\frac{x(t)}{1+x^2(t)},$$

con lo que $x(t)$ verifica la ecuación diferencial.

2. Aplicar la regla de la cadena: Como $g(t,x)=0$ define una función $x(t)$ implícitamente, tenemos que $g(t,x(t))$ es una función de t, digamos $h(t)$. Así, la ecuación $g(t,x(t))=0$ es equivalente a $h(t)=0$, de modo que $h'(t)=0$. Pero, por la regla de la cadena

$$h'(t)=\frac{\partial g}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial g}{\partial t}=0.$$

En nuestro caso, $g(t,x)=\ln|x(t)|+\dfrac{x^2(t)}{2}-t-C=0$, de modo que

$$0=\frac{\partial g}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial g}{\partial t}=\left(\frac{1}{x}+x\right)x'-1\Longrightarrow\frac{1+x^2}{x}x'=1\Longrightarrow x'=\frac{x}{1+x^2},$$

y x verifica la ecuación diferencial.

Una observación adicional. Consideremos la siguiente ecuación diferencial:

$$y'=\left(\frac{x}{y}\right)^2.$$

Una solución implícita de esta ecuación es:

$$x^3-y^3(x)-1=0.$$

En efecto, derivando implícitamente en $x^3-y^3(x)-1=0$ tenemos $3x^2-3y^2(x)y'(x)=0\Longrightarrow y'(x)=\left(\dfrac{x}{y}\right)^2$ que es precisamente la ecuación diferencial dada. Sin embargo, esta solución implícita puede darse explícitamente: $y(x)=(x^3-1)^{1/3}$.

La observación es que siempre que una solución pueda darse explícitamente, debe hacerse.

Autoevaluación (Taller en grupo)

En los ejercicios del 1 al 4 verifique que la función dada es solución de la ecuación diferencial:

1. $xy^{''} = y^{'} \ln(\frac{y^{'}}{x})$ $\qquad y = e(c_1 x - c_1^2)e^{\frac{x}{c_1}} + c_2$

2. $yy^{''} = (y^{'})^2 + y^{'}\sqrt{y^2 + (y^{'})^2}$ $\qquad x = c_1 + \ln(\frac{y-c_2}{y+c_2})$

3. $y^2 = x^2(\frac{dy}{dx})^2 + 1$ $\qquad y = \frac{Cx}{2} + \frac{1}{2Cx}$

4. $\sqrt{x^4 + y^4}(xdy + ydx) + x^3dx + y^3dy = 0$ $\qquad x^4 + y^4 = (2xy + C)^2$

La solución de una ecuación diferencial ordinaria puede ser dada en forma explícita o implícita, en muy pocos ejemplos se puede expresar la solución en forma explícita. Los cálculos, incluso para ecuaciones que parecen muy simples, rápidamente se vuelven muy complicados y uno rápidamente comienza a comprender que las soluciones elementales no siempre serán posibles. Fue Liouville (1841) quien dio la primera prueba del hecho de que ciertas ecuaciones, como $y' = x^2 + y^2$ no puede ser resuelta en términos de funciones elementales.

Ejemplo 1.8 *La relación*

$$\ln y + y^2 - \int_0^x e^{-u^2} du = 0, \text{ con } y > 0,$$

es considerada una solución en forma implícita de la ecuación diferencial

$$\left(1 + 2y^2\right) y' - ye^{-x^2} = 0 \quad \text{o también} \quad y' = \frac{y}{1+2y^2} e^{-x^2}.$$

Esto puede ser visto derivando la relación dada implícitamente con respecto a x. Esto conduce a

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\left[\ln y + y^2 - \int_0^x e^{-u^2} du\right] &= 0 \Longleftrightarrow \frac{1}{y} y' + 2yy' - e^{-x^2} = 0 \Longleftrightarrow \left(\frac{1+2y^2}{y}\right) y' = e^{-x^2} \\ &\Longrightarrow \quad y' = \frac{y}{1+2y^2} e^{-x^2}. \end{aligned}$$

Observación 1.4 *Las soluciones a la mayoría de las ecuaciones diferenciales no se pueden expresar en términos finitos utilizando funciones elementales. A algunas soluciones de las ecuaciones diferenciales, debido a su importancia en las aplicaciones, se les dio etiquetas especiales (por lo general el nombre de un investigador de sus propiedades) y por lo tanto se refiere a las funciones especiales. Por ejemplo, hay dos integrales sinusoidales conocidas:*

$$\mathrm{Si}(x) = \int_0^x \frac{\operatorname{sen} t}{t} dt, \quad \mathrm{si}(x) = -\int_x^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} t}{t} dt = \mathrm{Si}(x) - \frac{\pi}{2},$$

y tres integrales coseno:

$$\mathrm{Cin}(x) = \int_0^x \frac{1-\cos t}{t} dt, \quad \mathrm{ci}(x) = -\int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t} dt \text{ y } \quad \mathrm{ci}(x) = \gamma + \ln x + \int_0^x \frac{\cos t}{t} dt,$$

donde $\gamma \approx 0,5772$ es la constante de Euler.

Otro comando para graficar en MATLAB es **fplot**, las gráficas 1.5 y 1.6 se obtienen con los siguientes comandos:

```
>> syms t
>> f='sin(t)/t';
>> fplot(f,[-6*pi,6*pi]);
>> grid on
>> syms x;
>> g=int(f,t,0,x);
>> figure
>> ezplot(g,[-6*pi,6*pi]);
>> grid on
```

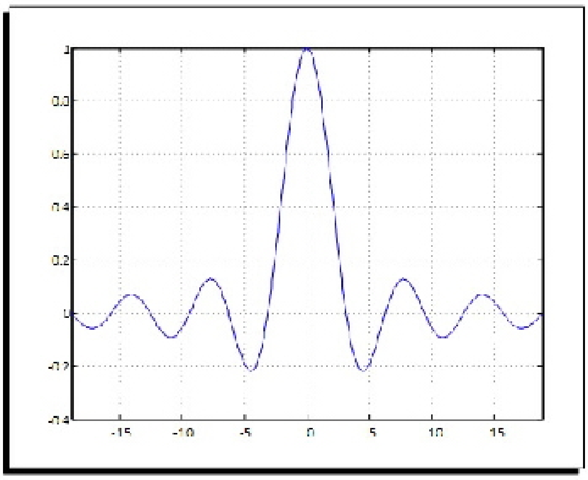

Figura 1.5 Gráfica de la función $\frac{\sin(t)}{t}$.

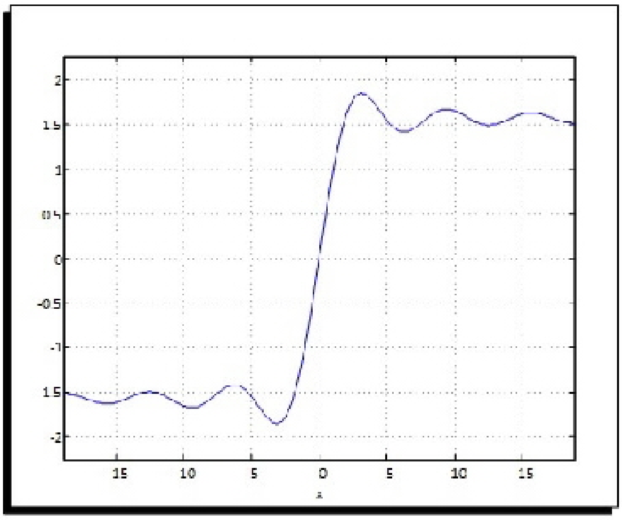

Figura 1.6 Gráfica de la función seno integral

$$\mathrm{Si}(x) = \int_0^x \frac{\operatorname{sen} t}{t} dt.$$

Ejemplo 1.9 *Use integral definida para encontrar una solución explícita al problema de valor inicial $xy' = \operatorname{sen} x$, sujeto a $y(0) = 1$.*

La ecuación diferencial se escribe $\frac{dy}{dx} = \frac{\sin(x)}{x}$, integrando y aplicando el primer teorema fundamental del cálculo se obtiene $\int_0^x dy = \int_0^x \frac{\sin(t)}{t} dt$, o también $y(x) - y(0) = \int_0^x \frac{\sin(t)}{t} dt$, finalmente $y(x) = 1 + \mathrm{Si}(x)$.

MATLAB incorpora estas funciones especiales, por ejemplo para utilizar la función seno integral, utilice los siguientes comandos:

```
>> sinint(pi)
>> ans = 1.8519
```

1.1.3. Soluciones particular y solución singular

Una solución de una ecuación diferencial es llamada solución particular, si ella no contiene cualquier constante arbitraria. Dando a C un cierto valor, obtenemos una solución particular de la ecuación diferen cial. Así que cada valor específico de C en la solución general identifica una solución o una curva particular. Otra forma de especificar una solución particular de $y' = f(x, y)$ es imponer una condición inicial:

$$y(x_0) = y_0,$$

que especifica una curva solución que pasa por el punto (x_0, y_0) en el plano. Sustituyendo en la solución general $y(x_0) = y_0$, determinamos el valor de la constante arbitraria.

A veces, por supuesto, no existe valor de la constante que satisfaga la condición dada $y(x_0) = y_0$, lo que indica que no hay una solución particular con la propiedad requerida entre toda la familia de curvas integrales de la solución general.

Definición 1.1 *Una ecuación diferencial* $y' = f(x, y)$ *(o, en general,* $F(x, y, y') = 0$*) sujeta a la condición inicial* $y(x_0) = y_0$*, donde* x_0 *y* y_0 *son valores especificos, es llamado un* ***problema de valor inicial*** *o un* ***problema de Cauchy****.*

Ejemplo 1.10 *Mostrar que la función* $y(x) = x\left[1 + \int\limits_1^x \frac{\cos u}{u} du\right]$ *es una solución del siguiente problema de valor inicial:*

$$xy' - y = x\cos x, \quad y(1) = 1.$$

La derivada de $y(x)$ *es:*

$$y'(x) = 1 + \int\limits_1^x \frac{\cos u}{u} du + x\frac{\cos x}{x} = 1 + \cos x + \int\limits_1^x \frac{\cos u}{u} du.$$

Luego,

$$xy' - y = x + x\cos x + x\int\limits_1^x \frac{\cos u}{u} du - x\left[1 + \int\limits_1^x \frac{\cos u}{u} du\right] = x\cos x.$$

La condición inicial también es satisfecha, pues,

$$y(1) = 1 \cdot \left[1 + \int\limits_1^1 \frac{\cos u}{u} du\right] = 1.$$

Definición 1.2 *Una solución singular de* $y' = f(x, y)$ *es una función que no es un caso especial de la solución general y para la que la singularidad del problema de valor inicial ha fallado.*

No toda ecuación diferencial tiene una solución singular, pero si lo tiene, la solución singular no puede ser determinada de la solución general para algún valor particular de C, incluyendo $\pm\infty$, puesto que las curvas integrales de la solución general no tienen puntos comunes. Una ecuación diferencial puede tener una solución que no es ni singular ni miembro de la familia uniparamétrica de las curvas de la solución general. De acuerdo con la definición, una solución singular siempre tiene un punto en el plano donde se encuentra con otra solución. Dicho punto se refiere generalmente como un punto de ramificación. En ese punto, dos curvas integrales se tocan porque comparten la misma pendiente $y' = f(x, y)$, pero no pueden cruzarse entre sí. Por ejemplo, las funciones $y = x^2$ y $y = x^4$ tienen la misma pendiente en $x = 0$, ellas se tocan, pero no se cruzan.

Una solución singular de especial interés es la que consiste en su totalidad de los puntos de ramificación en cada punto que es tangente a otra curva integral. Una envolvente de una familia de curvas uniparamétrica es una curva en el plano xy tal que en cada punto es tangente a una de las curvas integrales. Puesto que no hay una definición universalmente aceptada de una solución singular, algunos autores definen una solución singular como una envolvente de la familia de curvas integrales obtenidas a partir de la solución general. Nuestra definición de una solución singular incluye no solo las envolventes sino también todas las soluciones que tienen puntos de ramificación. Esta definición más amplia es motivada por las aplicaciones prácticas de las ecuaciones diferenciales en el modelado de los problemas del mundo real. La existencia de una solución singular da una señal de aviso en el uso de la ecuación diferencial como modelo fiable.

Una condición necesaria para la existencia de una envolvente es que x, y, C satisfagan las ecuaciones:

$$\Phi(x, y, C) = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial \Phi}{\partial C} = 0,$$

donde $\Phi(x, y, C) = 0$ es la ecuación de la solución general. Eliminando C podemos introducir una función que no es una solución de la ecuación diferencial dada. Por lo tanto, cualquier curva encontrada al resolver el sistema $\Phi(x, y, C) = 0$ y $\frac{\partial \Phi}{\partial C} = 0$, se debe comprobar si se trata una solución de la ecuación diferencial dada o no.

Ejemplo 1.11 *Consideremos la ecuación diferencial*

$$y' = 2\sqrt{y}, \quad \text{con } y \geq 0,$$

donde la raíz toma el signo positivo. Supuesto que $y > 0$, dividimos ambos miembros de la ecuación diferencial por $2\sqrt{y}$, lo que nos conduce a una ecuación a variables separables.

$$\frac{y'}{2\sqrt{y}} = 1, \text{ o también } \frac{d}{dx}(\sqrt{y}) = 1,$$

de la regla de la cadena, se sigue que:

$$\frac{d}{dx}(\sqrt{y}) = \frac{1}{2} y^{-1/2} y'.$$

Por tanto, $\sqrt{y} = x + C$, donde $x > -C$. La solución general de la ecuación diferencial dada está formada por la familia uniparamétrica de semiparábolas $y(x) = (x + C)^2$, o también $C = \sqrt{y} - x$, con $x \geq C$.

Algunas soluciones de $y' = 2\sqrt{y}$ y la solución singular $y = 0$ se pueden ver en la figura 1.7. Esta se obtiene utilizando la función **dfield8** que permite graficar campos direccionales y que se la puede descargar de la pagina `http://math.rice.edu/~dfield/`.

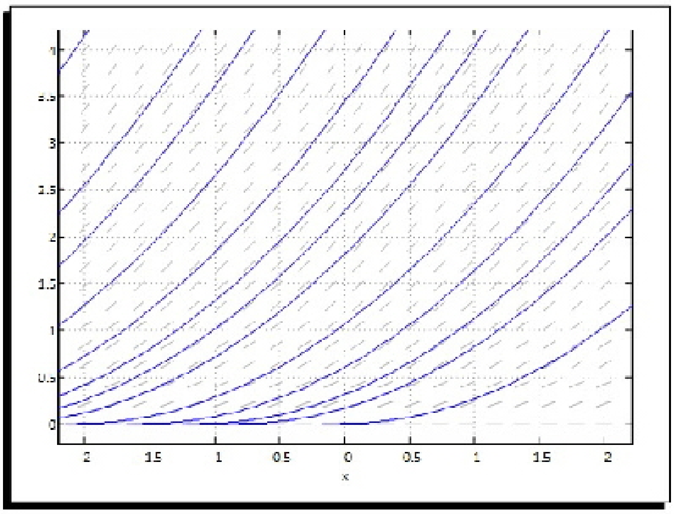

Figura 1.7 Curvas integrales de la ecuación diferencial $y' = 2\sqrt{y}$.

La función potencial para una ecuación diferencial dada es $\psi(x, y) = \sqrt{y} - x$. La ecuación $y' = 2\sqrt{y}$ tiene también una solución trivial $y = 0$ que consiste de puntos de ramificación, llamada la envolvente. Esta función es una solución singular puesto que $y = 0$ no es un miembro de la familia de soluciones $y(x) = (x + C)^2$ para cualquier elección de la constante C. La envolvente de la familia de curvas puede también ser encontrada del sistema $\Phi(x, y, C) = 0$ y $\dfrac{\partial \Phi}{\partial C} = 0$, resolviendo el sistema de ecuaciones: $(x + C)^2 - y = 0$ y $\dfrac{\partial \Phi}{\partial C} = 2(x + C) = 0$, donde $\Phi(x, y, C) = (x + C)^2 - y$.

Podemos dibujar algunas soluciones junto con la solución singular $y = 0$ como se indica en la gráfica de abajo.

En realidad, la ecuación dada tiene una infinidad de soluciones singulares que podrían ser construidas a partir de la singular envolvente $y = 0$ y la solución general juntando partes de soluciones. Una envolvente no necesariamente vincula las curvas integrales de un lado. Por ejemplo, la solución general de la ecuación diferencial $y' = 3y^{2/3}$ consiste de $y = (x + C)^3$ que llenan todo el plano xy. La envolvente es $y = 0$.

Ejemplo 1.12 *La ecuación diferencial* $5y' = 2y^{-3/2}$, $y \neq 0$, *tiene la familia uniparamétrica de soluciones* $y = (x - C)^{2/5}$, *que puede ser escrita en forma implícita* $\Phi(x, y, C) = 0$, *con* $\Phi(x, y, C) = y^5 - (x - C)^{2/5}$. *Derivando con respecto a* C *e igualando a cero, obtenemos* $y = 0$, *que no es una solución. Este ejemplo muestra que las condiciones* $\Phi(x, y, C) = 0$ *y* $\dfrac{\partial \Phi}{\partial C} = 0$, *son solamente necesarias para la existencia de la envolvente.*

Ejemplo 1.13 *Pruebe que la función* $y(x)$ *definida implícitamente por la ecuación* $y = \arctan(x + y) + C$, *donde* C *es una constante, es la solución general de la ecuación diferencial* $(x + y)^2 y' = 1$.

La regla de la cadena muestra que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1 + (x + y)^2}\left(1 + \frac{dy}{dx}\right),$$

de donde

$$\frac{dy}{dx} + (x + y)^2 \frac{dy}{dx} = 1 + \frac{dy}{dx}.$$

De donde se sigue que $(x + y)^2 y' = 1$.

A continuación se muestra como utilizar el comando **dfield8** en MATLAB para graficar las curvas integrales, al ejecutar el comando

```
>> dfield8
```

Aparecerá después de unos segundos la pantalla que se muestra en la figura 1.8, ingrese todos los valores correspondientes de la ecuación diferencial: la variable independiente, la variable dependiente, la ecuación diferencial, los límites inferiores y superiores de las variables y de un click en el botón *Proceed* y automáticamente aparece las curvas integrales de la ecuación diferencial que se indica en la figura 1.8.

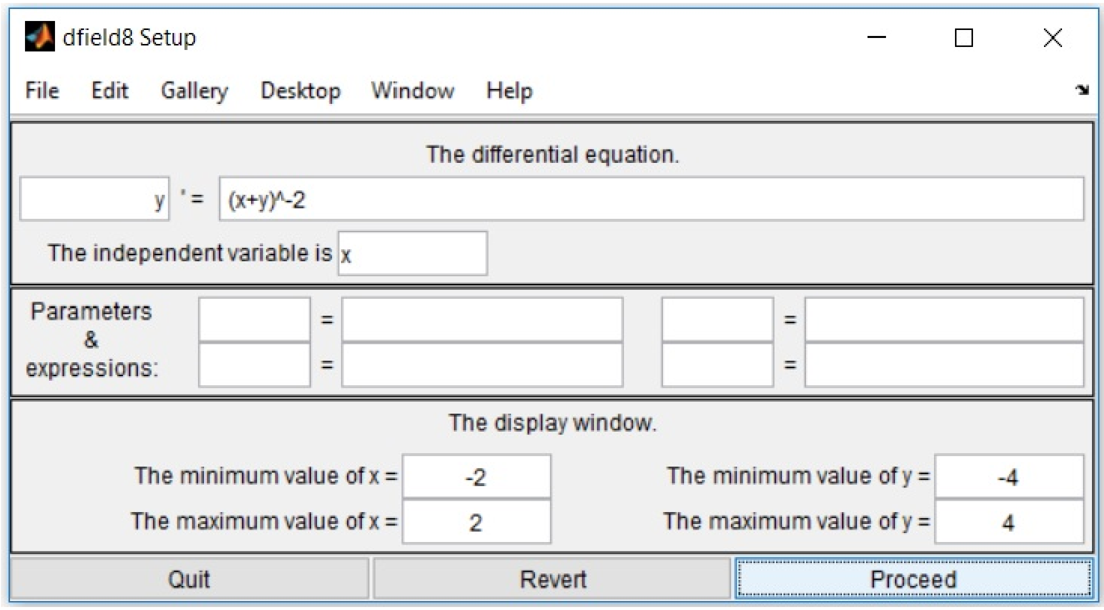

Figura 1.8 Pantalla principal al ejecutar el comando dfield8.

En la figura 1.9 se muestra las curvas integrales.

El siguiente ejemplo muestra cómo para una función que contiene una constante arbitraria como un parámetro podemos encontrar una ecuación diferencial relevante para la cual la función dada es su solución general.

Para una constante arbitraria C, mostrar que la función $y = \dfrac{C-x}{1+x^2}$ es la solución general de la ecuación diferencial

$$(1+2xy)\,dx + \left(1+x^2\right)dy = 0.$$

Pruebe que esta ecuación no tiene otras soluciones.

Solución. La ecuación diferencial de esta función es

$$dy = y'dx = \frac{-\left(1+x^2\right) - (C-x)\,2x}{\left(1+x^2\right)^2}dx = \frac{x^2-1-2Cx}{\left(1+x^2\right)^2}dx.$$

Multiplicando ambos miembros por $1+x^2$, tenemos

$$\left(1+x^2\right)dy = \frac{x^2-1-2Cx}{\left(1+x^2\right)}dx = \frac{-x^2-1+2x^2-2Cx}{1+x^2}dx = -\left(1+2x\frac{C-x}{1+x^2}\right)dx$$

y, puesto que $y = \dfrac{C-x}{1+x^2}$, obtenemos

$$-\left(1+x^2\right)dy = \frac{x^2-1-2Cx}{\left(1+x^2\right)}dx = (1+2xy)\,dx.$$

Vamos a probar ahora que no hay otra solución que $y = \dfrac{C-x}{1+x^2}$. Resolviendo para C, encontramos la función potencial $\varphi(x,y) = \left(1+x^2\right)y + x$. Suponiendo lo contrario, es decir que existe otra solución, sea $y = \phi(x)$ una tal solución. Sustituyendo $y = \phi(x)$ en la función potencial $\varphi(x,y)$, obtenemos una función que denotamos por $F(x)$, que es, $F(x) = \left(1+x^2\right)\phi(x) + x$. Derivando obtenemos

$$F'(x) = 2x\phi(x) + \left(1+x^2\right)\phi'(x) + 1.$$

Puesto que $\phi'(x) = -\dfrac{1+2x\phi(x)}{1+x^2}$, tenemos

$$F'(x) = 2x\phi(x) - (1+2x\phi(x)) + 1 = 0.$$

Por lo tanto, $F(x)$ es una constante, que denotamos por C. Esto es, $\phi(x) = \dfrac{C-x}{1+x^2}$.

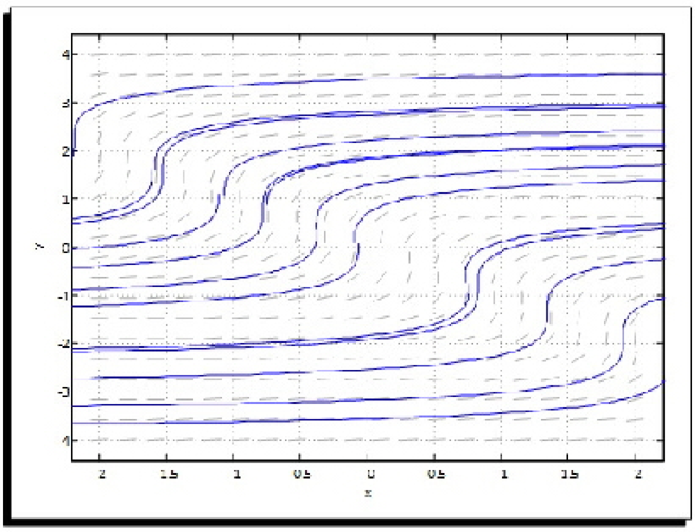

Figura 1.9 Curvas integrales de la ecuación diferencial
$y' = \frac{1}{(x+y)^2}$.

Ejemplo 1.14 *Sea $y' = f(x,y) = \sqrt{|y|}$ para cada $y \in \mathbb{R}$. Como esta función es continua en todo el plano, entonces la ecuación diferencial tiene la forma $y' = f(x,y)$. Las siguientes funciones son todas soluciones:*

$$\varphi_{\alpha,\beta}(x) = \begin{cases} -\frac{1}{4}(x-\alpha)^2, \ si\ x \le \alpha; \\ 0, \ si\ \alpha \le x \le \beta; \\ \frac{1}{4}(x-\beta)^2, \ si\ \beta \le x \end{cases}$$

donde $\alpha \le \beta$. Es posible que $\alpha = -\infty$ o bien $\beta = \infty$. Observamos que existe un conjunto infinito de soluciones que satisfacen $\varphi(0) = 0$.

La figura 1.10 muestra el campo de direcciones obtenido con el comando **dfield8,** y también las curvas integrales que se obtienen fácilmente al dar un click en la pantalla que sale el campo de direcciones.

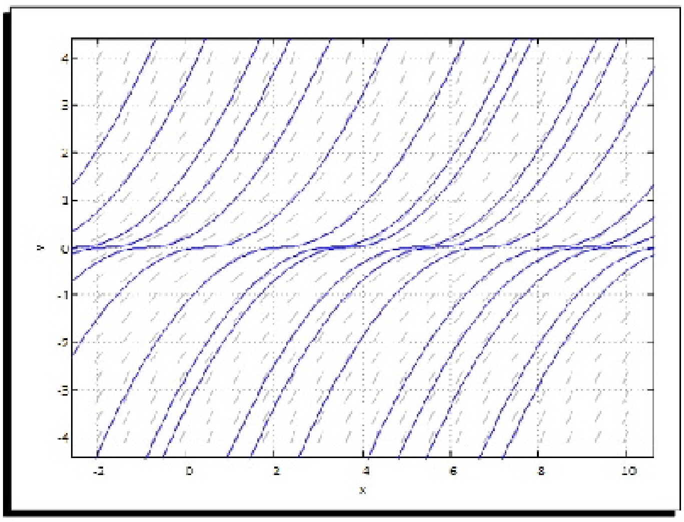

Figura 1.10 Campo de direcciones y curvas integrales obtenido con el comando **dfield.**

Ejemplo 1.15 *Sea $x' = x - t$, Para cada $C \in \mathbb{R}$ existe la solución dada por $\varphi_C(t) = 1 + t + Ce^t$, $t \in \mathbb{R}$. Estas son las únicas soluciones. La figura 1.11 de abajo muestra su gráfica. Las soluciones se separan entre sí al aumentar el tiempo, por lo que un pequeño cambio en las condiciones iniciales produce un error que va aumentando con el transcurso del tiempo.*

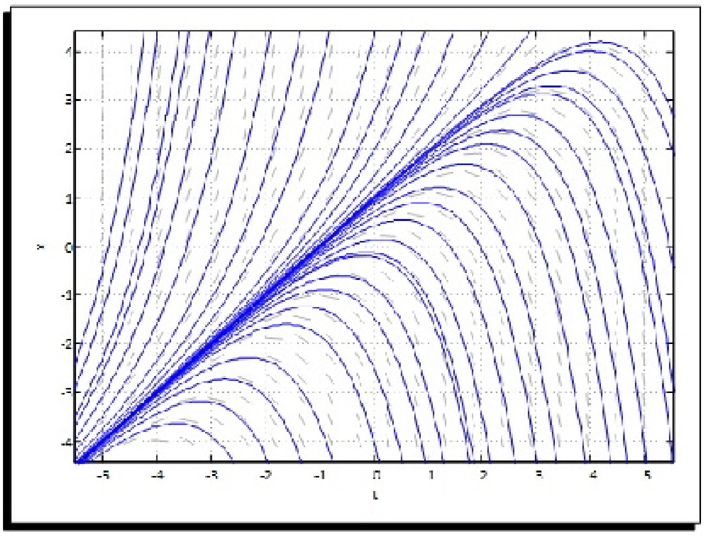

Figura 1.11 Campo de direcciones y curvas integrales
$x^{'} = x - t$.

Ejemplo 1.16 *Sea $x' = 2xt$. Las soluciones son $\varphi(t) = Ce^{t^2}$ donde $t \in \mathbb{R}$.*

Para encontrar la solución de la ecuación diferencial en MATLAB utilice el siguiente comando

```
>> dsolve('Dx-2*x*t=0')
>> ans =C5*exp(t^2)
```

Ejemplo 1.17 *Sea $x' = -\dfrac{x}{t}$. Las únicas soluciones son las ramas de las hipérbolas $\varphi(t) = \dfrac{C}{t}$ para $t \in I$, donde $I =]-\infty, 0[$ o bien $I =]0, \infty[$.*

Las únicas soluciones de la ecuación diferencial $x' = x^2$ son las ramas de las hipérbolas $\varphi(t) = \dfrac{1}{C - t}$ para todo $t \in I$, con $I =]-\infty, C[$ o bien $I =]C, +\infty[$.

Isoclinas

Cualquier miembro de la familia $f(x, y) = c$ se llama isoclina, que significa curva a lo largo de la cual la inclinación de las tangentes es igual. Al hacer variar el parámetro c, se obtiene un conjunto de isoclinas en que los elementos lineales se construyen adecuadamente. La totalidad de esos elementos lineales se denominan: campo de direcciones, campo direccional, campo de pendientes o campo de elementos lineales de la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$.

Ejemplo 1.18 *Las isoclinas de la ecuación diferencial $y^{'} = y - x$ son $y - x = m$, que son rectas de pendiente 1 y ordenada en el origen m.*

Ejemplo 1.19 *Dada la ecuación diferencial $xy' + (1 - x)y = 0$, las isoclinas son ahora $\dfrac{(x-1)y}{x} = m$, o si despejamos y :*

$$y = \frac{mx}{x - 1}$$

curvas que pasan por $(0, 0)$ y tienen una asíntota vertical en el punto $x = 1$.

La pendiente en el origen no está definida. De la expresión obtenida en primer lugar, uno puede deducir que la recta $x = 1$ es una isoclina de pendiente igual a cero. Asímismo, $x = 0$ es una isoclina de la ecuación $(\dfrac{dx}{dy})$ con pendiente igual a cero (o si se quiere de la ecuación inicial con pendiente ∞). El dibujo de las isoclinas y soluciones se muestra en la figura 1.12.

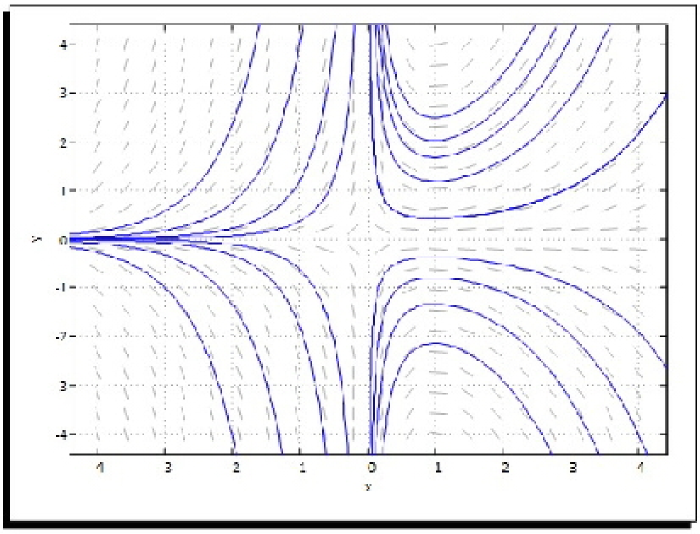

Figura 1.12 Isoclinas de la ecuación diferencial $y^{'} = \frac{(x-1)y}{x}$.

Ejemplo 1.20 *Otras características de las soluciones pueden obtenerse de la propia ecuación, Por ejemplo, el conjunto de puntos de inflexión está contenido en el conjunto de puntos que anulan a la segunda derivada y puede obtenerse de la ecuación sin más que derivar:*

$$y'' = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} f(x, y) = 0.$$

Ejemplo 1.21 *Dada la ecuación diferencial $y' = y^2 - x$, las isoclinas de esta ecuación son las curvas $y^2 - x = m$, es decir parábolas con eje horizontal. La derivada segunda de una solución es:*

$$y'' = 2y'y - 1 = 2y\left(y^2 - x\right) - 1$$

y por tanto, la ecuación de los posibles puntos de inflexión es la expresión anterior igualada a cero, es decir;

$$x = y^2 - \frac{1}{2y}.$$

En la siguiente figura pueden verse las isoclinas, curva de puntos de inflexión y algunas soluciones.

Ejercicio 1.5 *Representar las isoclinas de la edo $y' = 2x - y$. ¿Qué tipo de curvas son dichas isoclinas? Representar las isoclinas correspondientes a $m = 0$ y $m = 2$.¿Qué particularidad tiene la correspondiente a $m = 2$?*

Ejercicio. Construir el campo de direcciones y las curvas de nivel de la edo $y' = \operatorname{sen}(x) + y$.

Ejemplo 1.22 *Dibujemos aproximadamente las soluciones de $y' = \dfrac{2x - y}{x - y}$.*

Solución. Trazamos algunas isoclinas $\dfrac{2x - y}{x - y} = C$, de donde $y = \dfrac{2 - C}{1 - C}x$ (rectas que pasan por el origen), para diferentes valores de C y sobre cada una de ellas dibujamos algunos segmentos de pendiente C.

$C = 0 \Longrightarrow y = 2x$ (segmentos horizontales: posibles máximos y mínimos de las soluciones)

$C = 1 \Longrightarrow x = 0$; $\quad C = -1 \Longrightarrow y = \dfrac{3}{2}x$; ...

Una vez que sabemos que las isoclinas son rectas $y = mx$ (es trivial ver que esto sucede en toda ecuación homogénea) es más cómodo dibujar la recta de pendiente m que uno quiera y trazar sobre ella segmentos de pendiente $C = f(x, mx) = \dfrac{2 - m}{1 - m}$:

$$m = 0 \Longrightarrow C = 2; \quad m = 1 \Longrightarrow K = +\infty; \quad m = -1 \Longrightarrow C = \frac{3}{2}$$

Las curvas tangentes a estos segmentos parecen ser cerradas (o tal vez espirales poco abiertas).Podemos resolver la ecuación y comprobar (el ejemplo es poco práctico). Hay dos formas de hacerlo: mirándola como ecuación homogénea o como exacta:

$$y' = \frac{2-\frac{y}{x}}{1-\frac{y}{x}} \qquad o \qquad (2x-y)+(y-x)\,y' = 0.$$

Por los dos caminos se llega a $y^2 - 2xy + 2x^2 = C$ *con lo que las soluciones son elipses. Con más propiedad, cada una de ellas define de hecho dos soluciones en* $\left(-\sqrt{C}, \sqrt{C}\right)$: $y = x + \sqrt{C - x^2}$, $y = x - \sqrt{C - x^2}$ *funciones definidas en* $\left[-\sqrt{C}, \sqrt{C}\right]$ *no derivables en* $x = \pm\sqrt{C}$.

Dada la ecuación diferencial $y' = x - 2y$, *las isoclinas son* $y = \frac{1}{2}(x - C)$ *(rectas de pendiente*$\frac{1}{2}$*). Dibujamos las de* $C = -1,\ -\frac{1}{2},\ 0,\ \frac{1}{2},\ 1$ *y* $\frac{3}{2}$ *(que cortan respectivamente* $x = 0$ *en* $y = \frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ 0,\ -\frac{1}{4},\ -\frac{1}{2}$ *y* $-\frac{3}{4}$ *).*

Si $C = \frac{1}{2}$, *la recta y los segmentos trazados sobre ella tienen la misma pendiente y por tanto la isoclina es solución de la ecuación (por ser tangente al campo de direcciones).*

Podemos, también en este caso, resolver la ecuación (que es lineal) y comprobar. Bastará sumar la solución general de la homogénea a la particular ya encontrada: $y = \frac{x}{2} - \frac{1}{4} + Ce^{-2x}$ *(a lo mismo llegaríamos con la fórmula* $y = Ce^{-2x} + e^{-2x}\int xe^{2x}dx$*).*

Ejemplo 1.23

$$y' = \frac{3xy + 2y^2}{x^2 + xy}.$$

Es una ecuación homogénea (tanto el numerador como el denominador son homogéneos de grado 2), con

$$f(1,z) = \frac{3z + 2z^2}{1+z} \Longrightarrow f(1,z) - z = \frac{z(z+2)}{z+1}.$$

Las soluciones lineales son por tanto $y = 0$ *y* $y = -2x$. *Las demás soluciones están dadas por*

$$\log|x| + C = \int \frac{z+1}{z(z+2)}dz = \int \frac{1}{2}\left(\frac{1}{z} + \frac{1}{z+2}\right)dz?\frac{1}{2}\log|z(z+2)|,$$

de donde

$$z(z+2) = Cx^2.$$

con $K = \pm e^{2C}$ *constante no nula. Resolviendo esta ecuación cuadrática en* z *y sustituyendo* $z = \frac{y}{x}$ *obtenemos finalmente*

$$y = -x \pm x\sqrt{1 + Cx^2}.$$

Esta solución está definida para todo x *si* $C > 0$, *y para* $|x| < \frac{1}{\sqrt{|C|}}$ *si* $C < 0$. *En este caso* f *es singular en las rectas* $x = 0$ *y* $x + y = 0$, *por lo que el abierto* U *estará contenido enuna de las cuatro regiones abiertas determinadas por la intersección de estas rectas. En cada una de estas regiones el signo del radical en la fórmula anterior está bien determinado: por ejemplo, si* $x < 0$ *y* $x + y > 0$ *deberá tomarse el signo* $-$. *Finalmente, nótese que haciendo* $C = 0$ *en la fórmula obtenemos las dos soluciones lineales.*

Ejemplo 1.24 *Sin embargo esta estrategia no siempre produce los frutos deseados. Sin ir más lejos, el problema*

$$\begin{cases} y^2 + (y')^2 = 0 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

no tiene solución y

$$\begin{cases} y' = 3y^{2/3} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

tiene al menos dos soluciones dadas por $y(x) = 0$ *y* $y(x) = x^3$. *Se verá más adelante bajo qué condiciones los problemas de existencia y unicidad tienen asociados una única solución.*

Autoevaluación (Taller en grupo)

En los siguientes ejercicios utilice el comando **dsolve** para resolver la ecuación diferencial:

1. $x^2y^{''} + xy^{'} = 1$

2. $y^{'} + \frac{1}{4}(y^{''})^2 = x(y^{''})$

3. En los siguientes ejercicios grafique el campo de direcciones con **dfield8**:

   a) $y^{'} = \cos y(\sin y - 2\cos y)/x$
   b) $y' = \frac{y}{x} + \sin(\frac{y}{x})$

   c) $y' = \frac{(ax^3-1)y}{x(x^3+1)}$
   d) $y'(y')^2 - 2xy' + y = 0$

Ejercicios

En cada uno de los siguientes ejercicios se presenta una ecuación diferencial y una función. Verificar que la función es solución de la ecuación diferencial. En cualquier caso, las C (con subíndice o sin él) que aparecen son constantes.

1. $xy' + y = \cos x; \quad y = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}.$
2. $y' - (\tan x)\, y = 0; \quad y = \dfrac{C}{\cos x}.$
3. $yy' = x - 2x^3; \quad y = x\sqrt{1-x^2}.$
4. $y' = 3y^2; \quad y = -\dfrac{1}{3x+C}.$
5. $yy' = x - 2x^3; \quad y = x\sqrt{1-x^2}.$
6. $y' = 3y^2; \quad y = -\dfrac{1}{3x+C}.$
7. $x \operatorname{sen} x \dfrac{dy}{dx} + (\operatorname{sen} x + x\cos x)\, y = xe^x; \quad y = \dfrac{e^x (x-1) + C}{x \operatorname{sen} x}.$
8. $y' + y\cos x = \dfrac{1}{2}\operatorname{sen} 2x; \quad y = \operatorname{sen} x - 1 + Ce^{-\operatorname{sen} x}.$
9. $x\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{y}{\sqrt{1-x^2}} = \left(1+\sqrt{1-x^2}\right) e^x; \quad y = \left(\dfrac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\right)(e^x + C).$
10. $y\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 + 2x\dfrac{dy}{dx} - y = 0; \quad y^2 = 2Cx + C^2.$
11. $y' = e^{(x-y)}; \quad y = \ln (C + e^x).$
12. $xy\left[1 - \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2\right]) = \left(x^2 - y^2 - a^2\right)\dfrac{dy}{dx}; \quad y^2 = Cx^2 - \dfrac{a^2 C}{1+C}.$
13. $\left(x^2 + y^2\right) dx - 2xydy = 0; \quad y = \sqrt{x^2 - Cx}.$
14. $xy' = y\tan(\ln y); \quad y = e^{\operatorname{arcsen}(Cx)}.$
15. $\dfrac{d^3y}{dx^3} + \dfrac{3}{x}\dfrac{d^2y}{dx^2} = 0; \quad y = C_1 x + \dfrac{C_2}{x} + C_3.$
16. $y' - y = e^{x+x^2}; \quad y = e^x \displaystyle\int_0^x e^{t^2} dt + Ce^x.$
17. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1+x^2}{1+y^2}; \quad x = \dfrac{y+C}{1-Cy}.$
18. $\left(xy^2\right)' = xy^3\left(x^2+1\right); \quad y = -\dfrac{5}{x^3 + 5x - C\sqrt{x}}.$
19. $L\dfrac{di}{dt} + Ri = E; \quad i = \dfrac{E}{R} + Ce^{-\frac{R}{L}t}$; donde $L \neq 0$; $R \neq 0$ y E son constantes dadas y C es una constante arbitraria.
20. $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 2k\dfrac{dy}{dx} + k^2 y = e^x; \quad y = (C_1 + C_2 x)\, e^{kx} + \dfrac{e^x}{(k-1)^2}$, con k una constante.
21. $\left(1-x^2\right)\dfrac{d^2y}{dx^2} - x\dfrac{dy}{dx} - A^2 y = 0; \quad y = C_1 e^{A \operatorname{arcsen} x} + C_2 e^{-A \operatorname{arcsen} x}$, donde A es una constante.

22. Una solución general de la ecuación diferencial $yy' - 4x = 0$ puede escribirse como $4x^2 - y^2 = C$. Determinar la solución particular que satisface a la condición $y\,(2) = \sqrt{7}$.

23. La ecuación diferencial $y'' + 4y = 0$ admite a $y = A\cos(2t) + B\,\text{sen}\,(2t)$ como solución general. Determine la solución particular que cumple con $y\,(0) = 3$ y $y'' = 8$.

1.2. Ecuaciones diferenciales autónomas

1.2.1. Notas sobre ecuaciones diferenciales autónomas

Considérese una ecuación del tipo $x' = f(x)$, donde la incógnita es una función $x(t)$. Este tipo de ecuaciones se llaman autónomas porque la función f no depende de la variable independiente t. Observe que son ecuaciones de variables separables. Existe un método para resolverla, lo que no quiere decir que siempre se pueda resolver (es posible que las integrales que aparezcan no se puedan calcular). Por otro lado, el hecho de que la ecuación sea de variables separables implica que existe una única solución de la ecuación que satisface $x(t_0) = x_0$ si $f(x_0) \neq 0$.

Observación 1.6 *Si la ecuación diferencial de primer orden satisface la propiedad de existencia y unicidad de solución con dato inicial, entonces las curvas gráficas de dos soluciones diferentes, no se intersecan.*

Definición 1.3 *Un punto de equilibrio x_0 es estable si existe un entorno de x_0 tal que toda solución que en algún instante t caiga en ese entorno permanecerá dentro de él en el futuro y tenderá a x_0 cuando el tiempo t tiende a $+\infty$. En caso contrario, el punto de equilibrio se llamará inestable.*

Ahora, sería bueno saber cómo decidir si el punto de equilibrio es estable o no. Para esto volvamos a la argumentación de arriba: si la función f es positiva en x toda solución que en un cierto valor t sea igual a x tendrá que ser creciente en el instante t. Por lo tanto, si $f(x_0) = 0$ y $f(x)$ es positiva en un semientorno izquierdo de x_0, entonces para cualquier x en ese entorno, se tiene que la solución que pasa por x crece y por lo tanto se mantendrá en el entorno y tenderá a x_0. Si, en cambio, $f(x)$ es negativa en un semientorno izquierdo de x_0, entonces la solución que valga x decrecerá, alejándose así de x_0. El mismo tipo de consideraciones sirve para un entorno derecho de x_0.

Notar que, en particular, si en un entorno reducido de x_0 el signo de f es constante, entonces x_0 es inestable:

Concluimos los siguientes resultados de estabilidad:

Proposición 1.7 *Un punto de equilibrio x_0 es estable si $f(x)$ es positiva en un semientorno izquierdo de x_0 y negativa en uno derecho.*

Proposición 1.8 *Un punto de equilibrio x_0 es inestable si $f(x)$ es negativa en un semientorno izquierdo de x_0 o positiva en uno derecho.*

Si f es una función derivable, la condición de la Proposición 1 es verificada siempre que $f'(x_0) < 0$, y entonces se tiene el siguiente corolario:

Corolario 1.9 *Un punto de equilibrio x_0 es estable si $f'(x_0) < 0$.*

Idénticas consideraciones permiten afirmar también:

Corolario 1.10 *Un punto de equilibrio x_0 es inestable si $f'(x_0) > 0$.*

Finalmente, observamos que, aún cuando una ecuación autónoma no pueda resolverse por lo complicadas que puedan ser las integrales involucradas, de todos modos es posible calcular el límite de una solución cuando t tiende a $\pm\infty$. En efecto, supongamos que se tiene determinado el signo de la función f y que x es una solución cuyo valor en algún instante t pertenece a un intervalo $]a, b[$ donde f es positiva y que $f(b) = 0$. Entonces x es una función creciente, y solo dejaría de ser creciente si en algún momento $x(t)$ se pasa de b. Pero esto no es posible porque el punto b es de equilibrio, y si x alcanza alguna vez el valor b quiere decir que es b para todo t. Se concluye que la solución es creciente para todo $t > 0$, y resta ver hasta donde llega, es decir, queremos saber todavía cuánto vale el $\lim\limits_{t\to+\infty} x(t)$, que sabemos que existe porque la $x(t)$ es creciente. Afirmamos que el límite es precisamente b: en efecto, si fuera menor, sería algún $\alpha < b$ donde la f es positiva, y entonces $x'(t)$ es mayor que una constante positiva a partir de un cierto t, y eso es absurdo ya que implicaría que la $x(t)$ tiende a $+\infty$.

La conclusión es la siguiente:

Si $x(t_0)$ pertenece a un intervalo donde f es positiva, entonces $\lim\limits_{t\to+\infty} x(t) = b$, donde b es la menor de las raíces de f mayores que $x(t_0)$. Si no hay raíces de f a la derecha de $x(t_0)$, entonces el $\lim\limits_{t\to+\infty} x(t) = +\infty$.

Idénticas consideraciones permiten afirmar que:

Si f es negativa en un intervalo que contiene a $x(t_0)$, entonces $x(t)$ es decreciente y tiende a la mayor raíz de f a la izquierda de $x(t_0)$. Como antes, si no hay raíces a la izquierda de $x(t_0)$, entonces el límite es $-\infty$.

Ejemplo 1.25 *El siguiente es un modelo para la temperatura de un fluido:* $x' = \left(x^2 - 3x + 2\right) e^{-x}$, *donde* $x(t)$ *indica la temperatura en el instante* t. *Si intentamos resolverla como las ecuaciones de variables separables, quedaría*

$$\frac{x'}{\left(x^2 - 3x + 2\right) e^{-x}} = 1 \text{ o sea } \int \frac{dx}{\left(x^2 - 3x + 2\right) e^{-x}} = \int dt$$

y la integral de la izquierda parece difícil de calcular. Puede ser que nuestro interés sea averiguar si la temperatura llegará a 0 *o no y cuáles son los estados de equilibrio estables del sistema.*

Para eso estudiamos el signo de la función $f(x) = (x^2 - 3x + 2)e^{-x}$:

Los puntos de equilibrio (o sea las raíces de f) son $x = 1$ y $x = 2$; se tiene que f es negativa entre 1 y 2 y positiva fuera del intervalo $[1, 2]$. Por lo tanto obtenemos las siguientes conclusiones:

1. Como f es positiva a la izquierda de 1 y negativa a su derecha, resulta que 1 es punto de equilibrio estable.

2. Como f es negativa a la izquierda de 2 y positiva a su derecha, resulta que 2 es punto de equilibrio inestable.

3. Si la condición inicial es $x_0 < 1$ entonces la solución tenderá al punto de equilibrio 1.

4. Si la condición inicial es $x_0 \in]1, 2[$ entonces la solución tenderá al punto de equilibrio estable 1.

5. Si la condición inicial es $x_0 > 2$ entonces la solución tenderá a $+\infty$.

6. Si la temperatura inicial es positiva, entonces se mantendrá positiva en el futuro.

Definición 1.4 *Una ecuación de primer orden en la forma* $\dfrac{dy}{dt} = f(y)$ *es llamada autónoma (la variable* t *no aparece explícitamente).*

Definición 1.5 *Los ceros de* f *son llamados puntos críticos o puntos de equilibrio. Las soluciones constantes son llamadas soluciones de equilibrio.*

Ejemplo 1.26 *Encontrar las soluciones de equilibrio de la ecuación diferencial* $\frac{dy}{dx} = 2y\,(1 - y)$.

Solución: *Las raíces de* $f(y) = 2y\,(1 - y)$ *son* $y = 0$ *y* $y = 1$. *Luego las soluciones de equilibrio son* $y(x) = 0$ *y* $y(x) = 1$. *El campo direccional y algunas soluciones se muestra en la figura 1.13.*

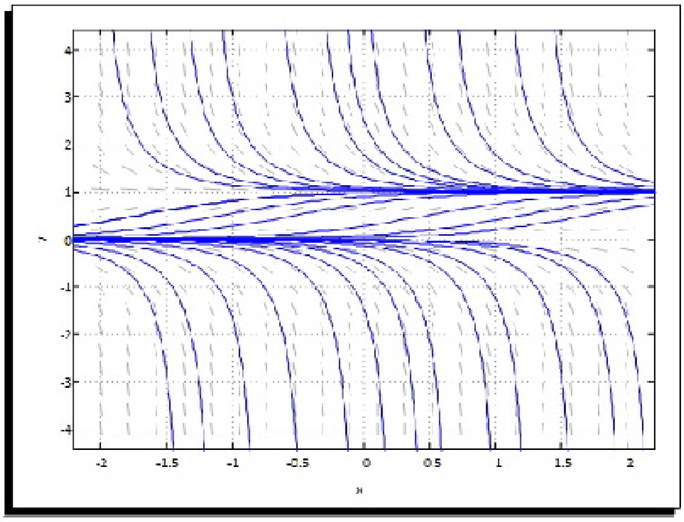

Figura 1.13 Soluciones de equilibrio de la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = 2y\,(1-y)$

El campo de dirección de una ecuación diferencial dada indica que a medida que x aumenta sin límite, cada solución o bien se mueve hacia o se aleja de una solución de equilibrio. Si todas las soluciones cercanas se mueven hacia una solución de equilibrio determinada se llama asintóticamente estable, estable, o atractor. La solución $y = 1$ está atrayendo. Una solución de equilibrio se llama inestable o repelente cuando todas las soluciones cercanas se alejan de él. La solución $y = 0$ es repelente.

En los casos en los cuales las soluciones en un lado de una solución de equilibrio se mueven hacia la solución de equilibrio y en el otro lado de la solución de equilibrio se alejan de ella, la llamamos solución de equilibrio semi-estable.

Observación 1.11 *Soluciones de equilibrio pueden ser definidas para ecuaciones diferenciales no autónomas.*

Ejemplo 1.27 *Por ejemplo, la función* $y(x) = 1$ *es una solución de equilibrio de la ecuación diferencial* $y' = (1-y)\,x^2$.

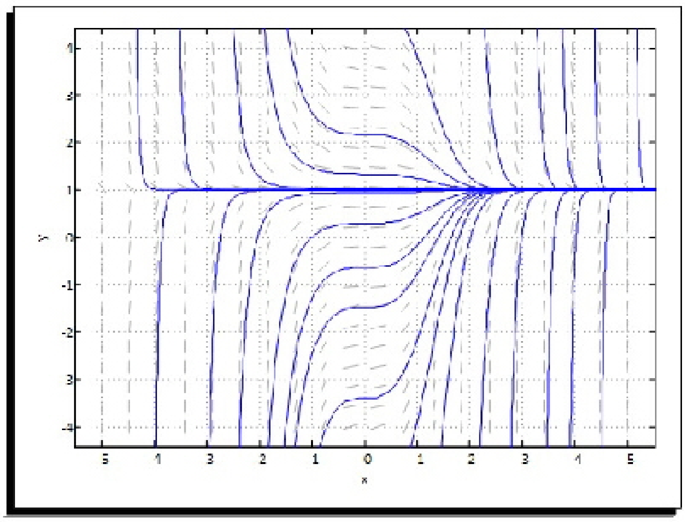

Figura 1.14 Campos de direcciones de la ecuación diferencial $y' = (1-y)\,x^2$.

Una solución de equilibrio no necesariamente tiene que atraer o repeler. El siguiente ejemplo ilustra esta situación.

Construir el campo direccional de la ecuación diferencial $y' = 4y\,(1-y)^2$. Mostrar que $y = 1$ no es ni estable ni inestable. El campo direccional se muestra en la figura 1.15.

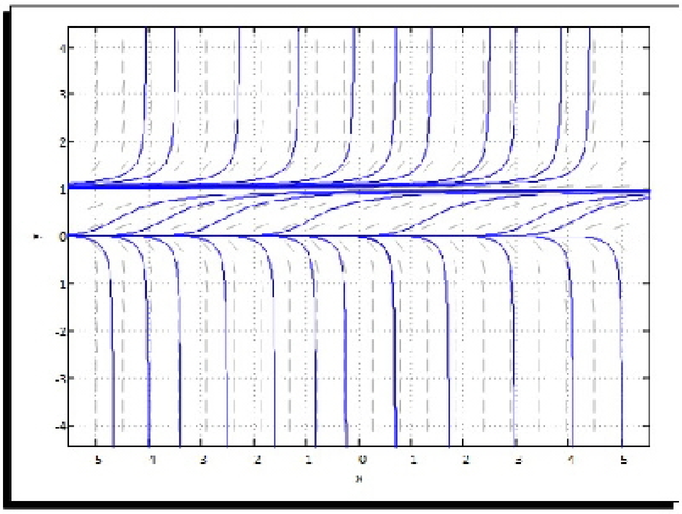

Figura 1.15 Campo direccional de la ecuación diferencial

Note que la solución de equilibrio $y(x) = 1$ no es ni estable ni inestable. Cerca de las soluciones que comienzan debajo de ella son atraídos hacia arriba, hacia él, pero las soluciones cercanas que comienzan por encima de ella son repelidos hacia arriba y lejos de ella. Otra representación cualitativa de una ecuación diferencial es el modo llamado línea de fase. Una línea de fase consta de puntos sólidos y flechas. Los puntos sólidos representan los puntos de equilibrio y las flechas indican las direcciones que las soluciones se mueven cuando t aumenta.

Ejercicios

1. Encontrar todas las soluciones de equilibrio de cada una de las ecuaciones diferenciales autónomas que se indican a continuación.

   a) $y' = (y-1)\,(y-2)$

   b) $y' = (y-1)\,(y-2)^2$

   c) $y' = (y-1)\,(y-2)\,(y-3)$

   d) $y' = y * \sin(y)$

2. Encontrar una ecuación diferencial autónoma con una solución de equilibrio en $y = 1$ y satisfaciendo $y' < 0$ para $-\infty < y < 1$ y $1 < y < +\infty$.

3. Dada la ecuación diferencial $y'(t) = y^2\left(y^2 - 4\right)$.

   a) Encontrar todas las soluciones $y =$ constante, de la ecuación diferencial.

   Mostrar que si $y(t)$ es solución al problema, $y\,(t - t_0)$ es también solución. Interprete el resultado geométricamente.

   b) ¿Para qué valores de y son las soluciones $y(t)$ crecientes? ¿decrecientes? Dibuje la línea fase para el problema.

   c) Describa el comportamiento de las soluciones cuando t tiende a infinito.

   d) Determinar la concavidad de las soluciones.

4. Encontrar una ecuación diferencial autónoma con una solución de equilibrio en $y = 1$ y satisfaciendo $y' < 0$ para $-\infty < y < 1$ y $1 < y < +\infty$.

5. Encontrar una ecuación diferencial autónoma que no tenga soluciones de equilibrio y que satisfaga $y' > 0$.

6. Encontrar una ecuación diferencial autónoma que no tenga soluciones de equilibrio y que satisfaga $y' > 0$.

1.3. Teorema de existencia y unicidad

Enunciaremos, sin demostración, una variante menos potente, pero que resulta de mayor utilidad práctica, ya que las condiciones suficientes son más fáciles de comprobar que otras menos restrictivas que pueden utilizarse en su lugar.

Teorema 1.12 ***(Existencia y unicidad).*** *Si la función f y su derivada $\frac{\partial f}{\partial y}$ son continuas en un dominio, el problema de condiciones iniciales*

$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases},$$

tiene una única solución para cada condición inicial (x_0, y_0)en el dominio.

1.3.1. Observaciones

Una ecuación diferencial de primer orden $y' = f(x,y)$ no necesariamente tiene una solución que la satisfaga. Por lo tanto, la existencia de una solución es un problema importante tanto desde el punto de vista teórico como de las aplicaciones.

Algunos fenómenos son modelados por una ecuación diferencial, entonces la ecuación debe tener una solución. Si no lo tiene, entonces presumiblemente hay algo mal con la modelación matemática y la necesidad de simulación para mejorar. Por lo tanto, un ingeniero o un científico les gustaría saber si una ecuación diferencial tiene una solución antes de invertir tiempo, esfuerzo, y las aplicaciones informáticas en un vano intento de resolverlo.

Una aplicación de un paquete de software puede fallar para proporcionar una solución de una ecuación diferencial dada, pero esto no significa que la ecuación diferencial no tiene una solución.

Siempre que un problema de valor inicial se ha formulado, hay tres preguntas que pueden formularse antes de encontrar una solución:

1. ¿Existe una solución de la ecuación diferencial que satisface las condiciones dadas?

2. Si existe una solución que satisface las condiciones dadas, puede haber una solución diferente que también satisface las condiciones?

3. ¿Cuál es la razón para determinar si un problema de valor inicial tiene una solución única si no vamos a ser capaces de determinar de forma explícita?

Una respuesta afirmativa a la primera pregunta es nuestra licencia de caza para ir en busca de una solución. En la práctica, se desea encontrar la solución de una ecuación diferencial que satisface las condiciones dadas a menos de un número finito de cifras decimales. Por ejemplo, si queremos dibujar la solución, nuestros ojos no pueden distinguir dos funciones que tienen valores que difieren en menos del 1 %. Por lo tanto, para aplicaciones de impresión, el conocimiento de tres cifras significativas en la solución es exactitud admisible. Esto puede hacerse, por ejemplo, con la ayuda de paquetes de software disponibles.

En general, la existencia o unicidad de un problema de valor inicial no puede ser garantizada. Por ejemplo, el problema de valor inicial $y' = y^2$, $x < 1$, $y(1) = -1$ tiene una solución $y = -x^{-1}$, que no existe para $x = 0$. Por otra parte, el problema de valor incial $y' = 2\sqrt{y}$, muestra que el problema de valor inicial puede tener dos (o más) soluciones.

Para la mayoría de las ecuaciones diferenciales en este libro, hay soluciones únicas que satisfacen ciertas condiciones establecidas. Sin embargo, consideremos la ecuación diferencial $xy' - 5y = 0$. Supongamos que un científico ha dibujado una curva experimental como se muestra en la figura 1.16.

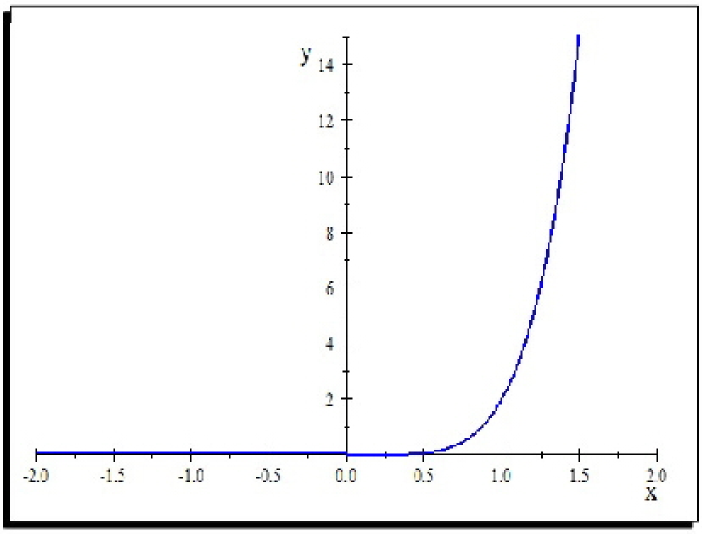

Figura 1.16 Curva experimental a la izquierda y solución modelada a la derecha.

La solución general de la ecuación diferencial es $y = Cx^5$ con una constante arbitraria C. De la condición inicial $y(1) = 2$, se sigue que $C = 2$ y por tanto $y = 2x^5$. Por lo tanto, los gráficos teóricos y experimentales estuvieron de acuerdo para $x > 0$, pero no están de acuerdo para $x < 0$.

Si el científico habría asumido erróneamente que existe una solución única, él puede decidir que la matemática era incorrecta. Sin embargo, puesto que la ecuación diferencial tiene un punto singular $x = 0$, su solución general contiene dos constantes arbitrarias, A y B, una para el dominio $x > 0$ y otra para $x < 0$. Así que

$$y(x) = \begin{cases} Ax^5, \text{ si } x \geq 0, \\ Bx^5, \text{ si } x \leq 0. \end{cases}$$

Por lo tanto, el gráfico experimental corresponde al caso $A = 2$ y $B = 0$.

Ahora supongamos que para la misma ecuación diferencial $xy' = 5y$ tenemos la condición inicial en el origen $y(0) = 0$. Entonces cualquier función $y = Cx^5$ la satisface para cualquier valor de C y tenemos entonces una infinidad de soluciones al problema de valor incial dado.Por otra parte, si queremos resolver la ecuación dada con la condición inicial $y(0) = 1$, estamos fuera de suerte. Este problema de valor inicial no tiene solución.

A continuación, trataremos dos teoremas fundamentales para ecuaciones diferenciales de primer orden sujetas a condiciones iniciales que prueban la existencia y unicidad de sus soluciones. Estos teoremas establecen condiciones suficientes para la existencia y unicidad de una solución; esto es, si las condiciones se cumplen, entonces la unicidad y/o existencia están garantizadas. Sin embargo, las condiciones no son condiciones necesarias en absoluto; todavía puede haber una solución única si no se cumplen estas condiciones. El siguiente teorema garantiza la existencia y unicidad para ecuaciones diferenciales lineales.

Teorema 1.13 *Consideremos el problema del valor inicial para la ecuación diferencial lineal*

$$\begin{cases} y' + a(x)y = f(x) \\ y(x_0) = y_0, \end{cases}$$

donde $a(x)$ y $f(x)$ son funciones conocidas y y_0 es un valor inicial arbitrario dado

Asumiendo que las funciones $a(x)$ y $f(x)$ son continuas en un intervalo abierto $\alpha < x < \beta$ que contiene el punto x_0. Entonces el problema de valor inicial $y' + a(x)y = f(x)$, $y(x_0) = y_0$, tiene una única solución $y = \phi(x)$ en el mismo intervalo $]\alpha, \beta[$.

Mostramos que si $y' + a(x)y = f(x)$ tiene una solución, entonces debe estar dada por la fórmula siguiente:

$$y(x) = \mu^{-1}(x) \left[\int \mu(x) f(x) dx + C \right], \quad \text{con } \mu(x) = \exp\left\{ \int a(x) dx \right\}.$$

Donde $\mu(x)$ es una función derivable no nula en el intervalo $]\alpha, \beta[$. Se tiene que

$$\frac{d}{dx}\left[\mu(x)y(x)\right] = \mu(x)f(x).$$

puesto que $\mu(x)$ y $f(x)$ son funciones continuas, su producto $\mu(x)f(x)$ es integrable y la ecuación $y(x) = \mu^{-1}(x)\left[\int \mu(x)f(x)dx + C\right]$, se sigue de esta última ecuación. Por tanto, la función $y(x)$ existe y es diferenciable en el intervalo $]\alpha, \beta[$. Sustituyendo la expresión para $y(x)$ en la ecuación diferencial, podemos verificar que esta expresión es una solución de la ecuación diferencial lineal. Finalmente, la condición inicial determina la constante C de manera única. Por sustitución directa

Si escogemos como límite inferior x_0 en todas las integrales en la expresión $y(x) = \frac{\int \mu(x)f(x)dx + C}{\mu(x)}$, entonces

$$y(x) = \frac{1}{\mu(x)}\left[\int_{x_0}^{x} \mu(s)f(s)ds + y_0\right], \quad \mu(x) = \exp\left\{\int_{x_0}^{x} a(s)ds\right\}$$

es la solución del problema de valor inicial $y' + a(x)y = f(x)$, $y(x_0) = y_0$.

En 1886, Giuseppe Peano da condiciones suficientes que solo garantizan la existencia de una solución para problemas de valor inicial.

Teorema 1.14 *(de Peano) Supongamos que la función $f(x, y)$ es continua en algún rectángulo:*

$$\Omega = \{(x, y) : x_0 - a \le x \le x_0 + a, \quad y_0 - b \le y \le y_0 + b\}. \text{ Sea } M = \max_{(x,y)\in\Omega} |f(x, y)|, \; h = \min\left\{a, \frac{b}{M}\right\}.$$

Entonces el problema de valor inicial $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$, tiene una solución en el intervalo $[x_0 - h, x_0 + h]$.

En la mayoría de las presentaciones de hoy, el teorema de Peano se demuestra con la ayuda del principio de compacidad Arzela-Ascoli para una sucesión de funciones o el teorema del punto fijo de Banach, que están más allá del alcance de este libro.

El teorema de existencia de Peano puede ser mirado como una generalización del teorema fundamental del cálculo, que hace la misma afirmación para la ecuación de primer orden $y' = f(x)$. La intuición geométrica sugiere que se puede obtener una curva solución, si la hay, de la ecuación $y' = f(x, y)$ enhebrando los segmentos del campo de dirección.

Giuseppe Peano (1858-1932) fue un famoso matemático italiano que trabajó en la universidad de Turín. En 1890, Peano mostró que la solución de la ecuación diferencial no lineal $y' = 3y^{2/3}$ sujeta a la condición inicial $y(0) = 0$ no es única. Descubrió y publicó una método para resolver ecuaciones diferenciales lineales usando aproximaciones sucesivas. Sin embargo, Emile Picard había redescubierto de manera independiente este método y lo había aplicado para mostrar la existencia y singularidad de las soluciones a los problemas de valores iniciales de las ecuaciones diferenciales ordinarias. Su resultado, conocido como el teorema de Picard, impone una condición más fuerte en $f(x, y)$ para evitar que la ecuación $y' = f(x, y)$ tenga soluciones singulares.

Conjectura 1.15 *Si la función continua $f(x, y)$ en el dominio $\Omega = \{(x, y) : \alpha < x < \beta, \quad -\infty < y < +\infty\}$ satisface la desigualdad $|f(x, y)| \le a(x)|y| + b(x)$, donde $a(x)$ y $b(x)$ son funciones continuas positivas, entonces la solución al problema de valor inicial $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$, existe en el intervalo $\alpha < x < \beta$.*

Teorema 1.16 *de Picard. Sea $f(x, y)$ una función continua en un dominio rectangular Ω que contenga el punto (x_0, y_0). Si $f(x, y)$ satisface la condición de Lipschitz*

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \le L|y_1 - y_2|$$

para alguna constante positiva L (llamada constante de Lipschitz) y x, y_1, y y_2 de Ω, entonces el problema de valor inicial $y' = f(x, y)$, $y_0 = y(x_0)$ tiene una solución única en algún intervalo $x_0 - h \le x \le x_0 + h$, donde h es definida por $h = \min\left\{a, \frac{b}{M}\right\}$, con $M = \max_{(x,y)\in\Omega} |f(x, y)|$.

El teorema de Picard impone una condición más fuerte sobre $f(x, y)$ para evitar que la ecuación $y' = f(x, y)$ tenga soluciones singulares.

Demostración. No podemos garantizar que la solución $y = \phi(x)$ del problema de valor inicial existe en el intervalo$]x_0 - a, x_0 + a[$ porque la curva integral $y = \phi(x)$ puede existir fuera del rectángulo Ω. Por ejemplo, si existe x_1 tal que $x_0 - a \le x_1 \le x_0 + a$ y $y_0 + b = \phi(x_1)$, entonces para $x > x_1$ (si $x_1 > x_0$) la solución $\phi(x)$ puede no estar definida.

Definitivamente sabemos que la solución $y = \phi(x)$ está en el rango $y_0 - b \le \phi(x) \le y_0 + b$ cuando $x_0 - h \le x \le x_0 + h$, con $h = \min\left\{a, \dfrac{b}{M}\right\}$

Observaciones:

- En 1838, Joseph Liouville fue el primero en usar el método de aproximaciones sucesivas en un caso especial.
- Charles Emile Picard (1856-1941) fue uno de las más grandes matemáticos franceses del siglo diecinueve.
- Es llamada la condición de Lipschitz en honor al matemático alemán Rudolf Lipschitz (1832-1903), quien lo introdujo en 1876 al elaborar pruebas de existencia para ecuaciones diferenciales ordinarias.

Corolario 1.17 *Si las funciones* $f(x,y)$ *y* $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ *son continuas en un rectángulo*

$$\Omega = \{(x,y) : x_0 - a \le x \le x_0 + a, \quad y_0 - b \le y \le y_0 + b\},$$

entonces el problema de valor inicial $y' = f(x,y)$, $y(x_0) = y_0$, *tiene una única solución en el intervalo* $|x - x_0| \le h$, *donde* h *está definido por* $h = \min\left\{a, \dfrac{b}{M}\right\}$ *con* $M = \max_{(x,y)\in\Omega} |f(x,y)|$ *y la constante de Lipschitz es* $L = \max\left|\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right|$.

Corolario 1.18 *Si las funciones* $f(x,y)$ *y* $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ *son continuas en una vecindad del punto* (x_0, y_0) *y* $f(x_0, y_0) \ne 0$, *entonces el problema de valor inicial* $y' = f(x,y)$, $y(x_0) = y_0$, *tiene una única solución.*

Ejemplo 1.28 *Consideremos nuevamente el problema de valor inicial* $y' = 2y^{1/2}$, $y(0) = 0$. *El teorema de Peano garantiza la existencia para el problema de valor inicial puesto que la función* $f(x,y) = 2y^{1/2}$ *es continua.El punto crítico* $y = 0$ *es obviamente una solución del problema de valor inicial. Podemos mostrar que* $f(x,y) = 2y^{1/2}$ *no es una función de Lipschitz asumiendo lo contrario. Existe entonces una constante positiva* L *tal que*

$$\left|y_1^{1/2} - y_2^{1/2}\right| \le L\,|y_1 - y_2|\,.$$

Haciendo $y_2 = 0$, *tenemos*

$$\left|y_1^{1/2}\right| \le L\,|y_1| \quad \text{o también} \quad 1 \le L\left|y_1^{1/2}\right|.$$

La última desigualdad no se cumple para pequeños y_1; *por lo tanto,* $f(y) = 2y^{1/2}$ *no es función Lipschitz. En este caso no podemos aplicar el teorema de Picard, y el problema de valor inicial dado puede tener múltiples soluciones. Puesto que la integral*

$$\int_0^y \frac{du}{2\sqrt{u}}$$

converge, el problema de valor inicial no tiene solución única. Además, para $x_0 > 0$ *arbitrario, la función*

$$y = \varphi(x) \underset{def}{=} \begin{cases} 0, \; si \; -\infty < x \le x_0, \\ (x - x_0)^2, \; si \; x > x_0, \end{cases}$$

es una solución singular del problema de Cauchy. Note que $y = 0$ *es la envolvente de la familia uniparamétrica de curvas,* $y = (x - C)^2$, *con* $x \ge C$, *correspondiente a la solución general.*

Ejemplo 1.29 *Consideremos la edo autónoma* $y' = |y|$, *la función pendiente* $f(x,y) = |y|$ *no es derivable en* $x = 0$, *pero es una función de Lipschitz, con* $L = 1$. *De acuerdo al teorema de Picard, el problema de valor inicial con la condición inicial* $y(0) = y_0$ *tiene solución única:*

$$y(x) = \begin{cases} y_0 e^x, \ si\ y_0 > 0, \\ 0, \ si\ y_0 = 0, \\ y_0 e^{-x}, \ si\ y_0 < 0. \end{cases}$$

Puesto que una función exponencial es siempre positiva, las curvas integrales nunca encuentran o cruzan la solución de equilibrio $y = 0$.

Ejemplo 1.30 *¿El problema de valor inicial*

$$\frac{dy}{dx} = 1 + \frac{3}{2}(y-x)^{1/3}, \quad y(0) = 0,$$

tiene una solución singular? Encontrar todas las soluciones de esta ecuación diferencial.

Solución. *Cambiando la variable dependiente a* $y - x = u$, *encontramos que la ecuación diferencial con respecto a* u *es* $u' = \dfrac{3u^{1/3}}{2}$. *La derivada de la función* $f(x,u) = f(u) = \dfrac{3u^{1/3}}{2}$ *es* $f'(u) = \dfrac{1}{2}u^{-2/3}$, *que no es acotada en* $u = 0$. *En este caso, el teorema de Picard no se puede aplicar y la ecuación diferencial* $u' = \dfrac{3u^{1/3}}{2}$ *puede tener una solución singular. dado que la ecuación para* u *es autónoma, podemos aplicar el teorema 1.41. La integral*

$$\int_0^u \frac{dz}{f(z)} = \frac{3}{2}\int_0^u z^{-1/3}dz = z^{2/3}\Big|_0^u = u^{2/3}$$

converge. Por lo tanto, hay otra solución además de la general, $y = \sigma(x+C)^{3/2}$, *donde* $\sigma = \pm 1$ *y* C *es una constante arbitraria. Note que la solución general de esta ecuación diferencial no lineal depende a más de la constante de integración; también depende del parámetro discreto* σ. *Retornando a la variable* y, *obtenemos la solución singular* $y = x$ *(que corresponde a* $u = 0$*) y la solución general* $y = x + \sigma(x - C)^{3/2}$, $x \geq C$.

1.4. Ecuaciones diferenciales a variables separables

1. Determine una famılia de soluciones de las siguientes ecuaciones diferenciales, utilice el comando **dsolve** de MATLAB para encontrar la solución exacta y utilice el comando **dfield8** para graficar los campos direccionales

   a) $\dfrac{1}{y}y' = \dfrac{1}{x}\log(x)$;

   b) $\dfrac{1}{y^3+y}y' = \dfrac{1}{x}$;

   c) $\cos^2(t)\cot(y)y' = -\tan(t)\,\mathrm{sen}^2(t)$;

   d) $te^y y' = -\dfrac{t^2+1}{y}$;

   e) $(t^2y - y)\,y' = -(ty^2+t)$;

   f) $\dfrac{dy}{dx} = (y^2+1)\,x$.

   g) $\dfrac{dy}{dx} = x\ e^{y+x^2}$.

   h) $\dfrac{dy}{dx} = 2x^5\sqrt{1+y}$.

   i) $\dfrac{dy}{dx} = (1+y^2)\cos 2x$.

   j) $(y\ln x)^{-1}\dfrac{dy}{dx} = \left(\dfrac{x}{y+1}\right)^2$.

   k) $\dfrac{d\theta}{dt} = (\cos t)\left(\cos 2\theta - \cos^2\theta\right)$.

   l) $\dfrac{ds}{dt} = \dfrac{(s^3-s)(4t^3-6t)}{(t^4-3t^2)(3s^2-1)}$

   m) $e^x y dy - (e^{-y} + e^{2x-y})\,dx = 0$.

   n) $\dfrac{dt}{du} = \dfrac{tu+u+3t+3}{tu+2u-t-2}$.

   ñ) $\dfrac{1}{(y-1)^2}dx + \dfrac{1}{\sqrt{x^2+4}}dy = 0$.

   o) $x^2y' = 1 - x^2 + y^2 - x^2y^2$.

   p) $\frac{dy}{dx} = \frac{xy+3x-y-3}{xy-2x+4y-8}$

   q) $\sec y\frac{dy}{dx} + \sin(x-y) = sen(x+y)$

   r) $(x+\sqrt{x})\frac{dy}{dx} = (y+\sqrt{y})$

2. Resuelva cada problema de valor inicial. Si es posible, encontrar soluciones explícitas. Determinar al menos aproximadamente el intervalo en el cual la solución está definida.

   a) $y' = \dfrac{x\left(x^2+2\right)}{4y^3}$, $y(0) = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.
   b) $y' = \dfrac{2x}{y+x^2y}$, $y(0) = -2$.
   c) $ye^{-x}y' + x = 0$, $y(0) = 1$.
   d) $\dfrac{2t-1}{t}dt + \dfrac{r-2r^2}{t^2-1}dt = 0$, con $r\,(2) = 4$.
   e) $\dfrac{dT}{dt} = k\,(T - T_1)$, con $T\,(0) = T_0$, donde k, T_0, T_1 son constantes.

3. Una población aislada, afectada de una enfermedad desconocida, va desapareciendo a ritmo inversamente proporcional a la población presente. Se sabe que la población que inicialmente es de 10 mil habitantes se reduce a 9 mil en 24 horas. Si $x(t)$ indica la población en el instante de tiempo t (medido en días), se pide:

   a) Completar la siguiente tabla

t	2	3	4	5
$x(t)$				

   indicando los valores de $x(t)$ mediante aproximaciones por defecto.
   b) Hallar el número de personas que permanece con vida transcurridas seis horas del sexto día.
   c) Hallar el número de personas que permanece con vida a las seis horas y quince minutos del sexto día.
   d) Calcular $\lim\limits_{t\to\left(\frac{100}{19}\right)^-} x(t)$ y explicar el significado de este resultado.

1.5. Ecuaciones diferenciales homogéneas

1. Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales homogéneas

   a) $y^{'} = \frac{(3x^2+y^2)y}{2x^3}$
   b) $\frac{x+yy^{'}}{x-yy^{'}} = \frac{x^2+y^2}{2(x^2-y^2)}$
   c) $z(\sqrt[4]{z} + 3\sqrt[4]{w})dw + w(3\sqrt[4]{z} + 4\sqrt[4]{w})dz = 0$
   d) $(xy - x\sqrt{x^2-y^2}\arcsin(\frac{y}{x}))dy - y^2dx = 0$
   e) $y' = \frac{x}{y}\sin(\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2})$
   f) $y^{'} = \log x - \log y$
   g) $y^{'} = \frac{y(x^2+xy+y^2)}{x(x^2+3xy+y^2)}$
   h) $y^{'} = \frac{y}{x} + \sin\frac{y}{x}$

2. Demuestre que la familia de curvas $x^n + y^n = Cx^my^m$ siempre conduce a ecuaciones diferenciales homogéneas. ¿Que limitaciones hay para los valores de n y m?

3. Resolver el problema de valor inicial

   a) $4x^3ydy + \left(x^4 - 4x^2y^2 - y^4\right)dx = 0$, con $y(-5) = 0$
   b) $y^{'} = \frac{y(1-\sqrt{x^2+y^2})}{x}$, con $y(0) = 4$
   c) $x^2y^{'} = xy - (x^2+y^2)\arctan(\frac{x}{y})$

4. Con la sustición $xy = \sin\theta$ o $xy = v$, resuelva la ecuación diferencial $y^{'} = \frac{(x^2y^2-2)\pm 2\sqrt{1-x^2y^2}}{x^3y}$

5. Resolver la ecuación diferencial $(1 + y^2e^{2x})y^{'} + y = 0$ con el cambio de variable $y = ue^{mx}$ donde m es una constante y u es una nueva función incógnita.

1.6. Ecuaciones diferenciales exactas y factores integrantes

1. Resolver la ecuación diferencial

a) $ye^{xy} + x\, y' e^{xy} + 2x = 0.$

b) $\left(3x^2y + 2xy + y^3\right) dx + \left(x^2 + y^2\right) dy = 0.$

c) $y' - y \tan x = \operatorname{sen} x \cos x.$

d) $(e^y + 2xy\cosh x)y' + xy^2 \sinh x + y^2 \cosh x = 0$

e) $(\sin y - y\sin x)dx + (\cos x + x\cos y - y)dy = 0$

f) $(2y - \frac{1}{x} + \cos 3x)\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x^2} - 4x^3 + 3y\sin 3x = 0$

g) $(1 - \frac{3}{x} + y)dx + (1 - \frac{3}{y} + x)dy = 0$

h) $(\tan x - \sin x \sin y)dx + \cos x \cos y dy = 0$

i) $\dfrac{dy}{dx} = e^x - \operatorname{sen} x.$

j) $x^2\dfrac{dy}{dx} + 2xy = e^x - \operatorname{sen} x.$

k) $y' + y = 1 + e^x.$

2. ¿Es la ecuación $(2xy+3)\,dx + \left(x^2-1\right) dy = 0$, una ecuación diferencial exacta? Si la respuesta es afirmativa, resuélvala.

3. Resolver el problema de valor inicial

   a) $(2x - y) + (2y - x)\, y' = 0$, con $y(1) = 3$.

   b) $xy' - 2y = \sqrt{x}$, con $y(1) = 0$.

   c) $ty' + (t+1)\, y = t$, con $y(\ln 2) = 1$, $t > 0$.

   d) $(x+y)^2dx + (2xy + x^2 - 1)dy = 0$, con $y(1) = 1$

   e) $(x+y)^2dx + (2xy + x^2 - 1)dy = 0$, con $y(1) = 1$

   f) $(\frac{3y^2 - x^2}{y^5})\frac{dy}{dx} + \frac{x}{2y^4} = 0$,con $y(1) = 1$

4. Encontrar el valor de y_0 para el cual la solución del problema de valor inicial $y' - y = 1 + 3\operatorname{sen} t$, con $y(0) = y_0$, permanece finita cuando $t \to +\infty$.

5. ¿Es la ecuación $x^2y^3 + x\left(1 + y^2\right) y' = 0$, una ecuación diferencial exacta? Multiplique la ecuación por el factor integrante $\mu\,(x, y) = \dfrac{1}{xy^3}$ y resolver la ecuación diferencial.

6. En los siguientes problemas determine el valor de k para que la ecuación diferencial correspondiente sea exacta

   a) $(y^3 + kxy^4 - 2x)dx + (3xy^2 + 20x^2y^3)dy = 0$

   b) $(2x - y\sin xy + ky^4)dx - (20xy^3 + x\sin xy)dy = 0$

   c) $(2xy^2 + ye^x)dx + (2x^2y + ke^x - 1)dy = 0$

   d) $(6xy^3 + \cos y)dx + (kx^2y^2 - x\sin y)dy = 0$

7. Deduzca una función $M(x, y)$ tal que la siguiente ecuación diferencial sea exacta

   a) $M(x,y)dx + (xe^{xy} + 2xy + \frac{1}{x})dy = 0.$

   b) $(y^{\frac{1}{2}}x^{-\frac{1}{2}} + \frac{x}{x^2+y})dx + M(x,y)dy = 0.$

8. Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales comprobando que la función $\mu(x, y)$ es un factor integrante.

   a) $6xydx + (4y + 9x^2)dy = 0$, $\quad \mu(x,y) = y^2$

   b) $-y^2dx + (x^2 + xy)dy = 0$, $\quad \mu(x,y) = \frac{1}{x^2y}$

   c) $(-xy\sin x + 2y\cos x)dx + 2x\cos xdy = 0$, $\quad \mu(x,y) = xy$

   d) $y^2dx + (1 + xy)dy = 0$, $\quad \mu(x,y) = e^{xy}$

9. ¿Bajo qué condiciones son exactas las siguientes ecuaciones diferenciales?

   a) $f(x)g(y)dx + h(x,y)dy = 0$

   b) $(f(x) + g(y))dx + (h(x) + l(y))dy = 0$

   c) $(x^3 + xy^2)dx + (ax^2y + bxy^2)dy = 0$

Autoevaluación (Taller en grupo)

Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales:

1. $(2y\sin x\cos x - y + 2y^2 e^{xy^2})dx = (x - \sin^2 x - 4xye^{xy^2})dy$

2. $(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{y}{x^2+y^2})dx + (ye^y + \frac{x}{x^2+y^2})dx$

3. En los siguientes ejercicios resuelva la ecuación diferencial sujeta a la condición indicada.

   a) $(y^2 \cos x - 3x^2 y - 2x)dx + (2y \sin x - x^3 + \ln y)dy = 0, \quad y(0) = e$

   b) $(\frac{1}{1+y^2} + \cos x - 2xy)\frac{dy}{dx} = y(y + \sin x), \;\; y(0) = 1.$

1.6.1. Ejercicios

1. Una ecuación diferencial de la forma $y' = f(t;y)$ se dice homogénea si $f(\lambda t; \lambda y) = f(t;y)$; para todo λ.

   a) Pruebe que si $y' = f(t;y)$ es una ecuación diferencial homogénea, es posible escribirla en la forma
   $$y' = g\left(\frac{y}{t}\right). \qquad (1)$$

   b) Pruebe que efectuando el cambio de variable dependiente ($y \to z$) definido por $\dfrac{y}{t} = z$, la ecuación (1) se transforma en una ecuación de variables separables.

   c) Pruebe que las siguientes edos son homogéneas y determine sus soluciones generales.

      1) $2t^2 + y^2 - tyy' = 0$;
      2) $ty' = te^{-t/y} + y$.

2. Determine una famılia de soluciones de las siguientes ecuaciones diferenciales.

   a) Lineales de primer orden:
   b) $y' + \cos(t) \cdot y = 0$;
   c) $y' + \dfrac{2t}{1+t^2}y = \dfrac{1}{1+t^2}$;
   d) $y' + t^2 y = 1$.

3. Determine el comportamiento, cuando $t \to +\infty$, de todas las soluciones de la ecuación diferencial $y' + ay = 0$; donde a es una constante.

4. Determine una solución continua del problema de valor inicial $y' + y = g(t)$; $y(0) = 0$; donde $g(t) = \begin{cases} 2. \text{ si } 0 \leq t \leq 1 \\ 0, \text{ si } t > 1, \end{cases}$.

5. Encontrar la solución general de la ecuación diferencial $\dfrac{y}{y'} = x + \sqrt{x^2+y^2}$.

   Solución. La ecuación puede ser escrita en la forma
   $$y\frac{dx}{dy} = x + \sqrt{x^2+y^2} \quad \text{o también,} \quad \frac{dx}{dy} = \frac{x}{y} + \sqrt{\frac{x^2}{y^2}+1}.$$
   Usando la sustitución $\dfrac{x}{y} = u$ o también, $x = yu$, se tiene:
   $$\begin{aligned}
   \frac{dx}{dy} &= u + y\frac{du}{dy} \Longrightarrow u + y\frac{du}{dy} = u + \sqrt{u^2+1} \Longrightarrow \frac{du}{\sqrt{u^2+1}} = \frac{dy}{y} \\
   &\Longrightarrow \int \frac{du}{\sqrt{u^2+1}} = \int \frac{dy}{y} + \ln C \Longrightarrow \ln\left(u + \sqrt{u^2+1}\right) = \ln y + \ln C \\
   &\Longrightarrow u + \sqrt{u^2+1} = Cy \Longrightarrow \frac{x}{y} + \sqrt{\frac{x^2}{y^2}+1} = Cy \Longrightarrow \sqrt{x^2+y^2} = Cy^2 - x \\
   &\Longrightarrow x^2 + y^2 = C^2y^4 - 2Cxy^2 + x^2 \Longrightarrow C^2y^2 = 2Cx + 1 \text{ es la solución general.}
   \end{aligned}$$

6. (El problema del nadador que cruza un río). Un nadador parte de un punto P en el banco. Él quiere llegar al punto Q en el otro lado. La velocidad del río es constante e igual a $v_1 = k_1$ y la velocidad del nadador es $v_2 = k_2$ donde k_2 es constante. Encontrar la trayectoria descrita por el nadador, sabiendo que la velocidad del nadador siempre se dirige hacia Q.

Solución. Seleccionemos Q como el origen del sistema como se muestra en la figura. Consideremos que M es la posición del nadador en el tiempo t. Las componentes de la velocidad en los dos ejes Ox y Oy son

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = k_1 - k_2 \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \\ \dfrac{dy}{dt} = -k_2 \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}. \end{cases}$$

Dividiendo la relación previa resulta:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y} - k\sqrt{\frac{x^2}{y^2}+1}, \quad \text{donde } k = \frac{k_1}{k_2}.$$

La siguiente sustitución es usada: $x = yu$ y $\dfrac{dx}{dy} = u + y\dfrac{du}{dy}$. La ecuación diferencial se transforma en

$$y\frac{du}{dy} = -k\sqrt{u^2+1} \quad \text{o también,} \quad \frac{du}{\sqrt{u^2+1}} = -k\frac{dy}{y}.$$

Luego de integrar se tiene:

$$\ln\left(u+\sqrt{u^2+1}\right) = -k\ln y + \ln C, \text{ con } C>0, \text{ o también, } \quad u+\sqrt{u^2+1} = Cy^{-k}.$$

De donde, $u = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{C}{y^k} - \dfrac{y^k}{C}\right)$. Retornando a las variables x y y, se obtiene, $x = \dfrac{y}{2}\left(\dfrac{C}{y^k} - \dfrac{y^k}{C}\right)$. De la condición de que la trayectoria pasa por el punto inicial $P(x_0, y_0)$ la constante C es $C = y_0^{k-1}\left(x_0+\sqrt{x_0^2+y_0^2}\right)$. La condición que pase por Q es escrita como $\lim\limits_{y\to 0} \dfrac{y}{2}\left(\dfrac{C}{y^k} - \dfrac{y^k}{C}\right) = 0$ y ello es posible si $k<1$. Para $k_1 = 0$, $k = 0$, la trayectoria tiene por ecuación $x = \frac{x_0}{y_0}y$; es decir, el segmento de recta entre P y Q.

7. Hallar todas las soluciones de $y' \sin x + y\cos x = 1$ en el intervalo $(0,\pi)$. Demostrar que una exactamente de estas soluciones tiene límite finito cuando $x \to 0$, y otra lo tiene también finito cuando $x \to \pi$.

8. Hallar todas las soluciones de $x(x+1)y' + y = x(x+1)^2e^{-x^2}$ en el intervalo $(-1,0)$. Probar que todas las soluciones tienden a 0 cuando $x \to 1$, y que tan solo una de ellas tiene límite finito cuando $x \to 0$.

9. La función f definida por la ecuación

$$f(x) = xe^{\frac{1-x^2}{2}} - xe^{-\frac{x^2}{2}}\int_1^x t^{-2}e^{\frac{t^2}{2}}\,dt$$

para $x > 0$ tiene las propiedades de que 1) es continua en el eje real positivo, y 2) satisface la ecuación

$$f(x) = 1 - x\int_1^x f(t)dt$$

para todo $x > 0$. Hallar todas las funciones con esas dos propiedades.

10. Dada una función f que satisface las relaciones

$$2f'(x) = f\left(\frac{1}{x}\right), \text{ si } x>0, \; f(1) = 2$$

a) Si $y = f(x)$, probar que y satisface una ecuación diferencial de la forma

$$x^2y'' + axy' + by = 0,$$

donde a y b son constantes.

b) Encontrar una solución de la forma $f(x) = Cx^n$.