

Capítulo 3

Vectores en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$

En este capítulo estaremos estudiando los vectores en dos y tres dimensiones y sus aplicaciones dentro de la actividad agropecuaria. En principio, estaremos estudiando los vectores en $\mathbb{R}^2$ definiendo algunos conceptos básicos para luego aplicarlos a la resolución de ejercicios y problemas. Veremos que sin mayor dificultad podremos extender estas definiciones a los vectores en $\mathbb{R}^3$ para así poder dar respuesta a otra variedad de problemas que se presentan en las actividades agropecuarias tales como: longitud de un canal, volumen de una excavación, área, cantidad de alambre de púas, cantidad de postes, desplazamiento, equilibrio de un sistema, módulo de la aceleración y fuerza resultante en anclaje entre otras aplicaciones. Estudiemos algunos conceptos básicos que hemos compilado de los aportes de Castañeda *et al.* (2020); Gigena *et al.* (2020) y Rojas (2022)

Conceptos básicos

En este apartado empezaremos a estudiar los vectores en $\mathbb{R}^2$. El primer paso para iniciar el estudio de los vectores es conocer algunos conceptos básicos que iremos definiendo e ilustrando con ejemplos, empecemos con entender qué es un vector.

Los vectores son entes matemáticos que forman parte de un espacio vectorial. Sin embargo, esta es una definición muy abstracta y poco útil al momento de intentar resolver nuestros problemas. Por ello, es costumbre ajustar la definición de un vector como segmentos de rectas dirigidos en el plano (o en el espacio) cumpliendo ciertas propiedades.

Magnitudes escalares y vectoriales

Existen magnitudes que pueden ser representadas por medio de un escalar, por ejemplo, la temperatura. Decimos que en cierto punto existe una temperatura de 30° y esta información es suficiente para comprender lo que se desea transmitir, otros ejemplos son la masa, el tiempo, el volumen. En todos estos casos las magnitudes quedan completamente definidas por un escalar (un número real), entonces diremos que son *magnitudes escalares*. Sin embargo, existen otras magnitudes que requieren de otra información adicional al escalar para que sean definidas completamente, por ejemplo, la fuerza. Si decimos que aplicamos una fuerza de 5N sobre una caja, queda la duda de hacia dónde se desplazó la caja, es decir en qué dirección. Por ello, estas magnitudes ameritan de un escalar y una dirección para que estén bien definidas. En este ejemplo tendríamos que decir que hemos aplicado una fuerza de 5N en dirección norte. En estos casos estaremos hablando de *magnitudes vectoriales*, otros ejemplos son el desplazamiento, la velocidad, la aceleración y el peso.

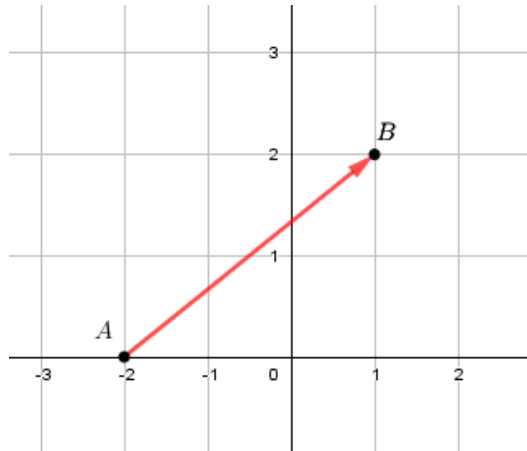
Vectores en $\mathbb{R}^2$

DEFINICIÓN 3.1

Un vector en $\mathbb{R}^2$ es un segmento de recta dirigido que tiene módulo y dirección representando gráficamente las magnitudes vectoriales.

El módulo del vector se refiere a su tamaño y la dirección está relacionada con la orientación del vector, la cual depende del ángulo que forma con la horizontal, más adelante estudiaremos en detalle estos elementos.

A continuación, podemos ver un ejemplo gráfico de un vector en el plano:

Figura 3.1*Representación gráfica de un vector en el plano*

Como se puede notar en la figura 3.1 el vector está formado a partir de dos puntos, el primer punto A se conoce como *origen del vector* y el segundo punto B *extremo del vector*. La notación utilizada para representar este vector es $\overrightarrow{AB}$.

Vectores libres

Desde un punto de vista gráfico podemos definir los vectores libres como sigue:

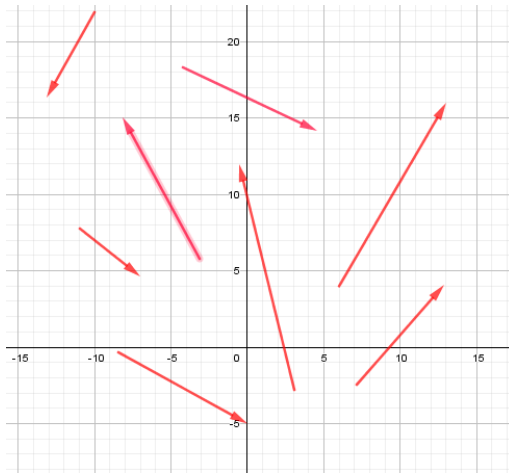
DEFINICIÓN 3.2

Los vectores libres son aquellos cuyo origen no coincide con el origen del plano cartesiano.

La figura 3.2 muestra un conjunto de vectores libres.

Figura 3.2

Representación gráfica de vectores libres



En general, una magnitud vectorial es un vector libre hasta no anclarlo a algún punto de referencia, el origen.

Para que un vector libre esté bien definido es necesario indicar cuál es su origen y cuál es su extremo. Por ejemplo, escribimos:

El vector libre $\overrightarrow{AB}$ donde $A(-1,2)$ y $B(2,3)$

El vector libre $\overrightarrow{CD}$ donde $C(1,-3)$ y $D(-2,0)$

El vector libre $\overrightarrow{EF}$ donde $E(0,-2)$ y $F(-2,-4)$

Vectores de posición

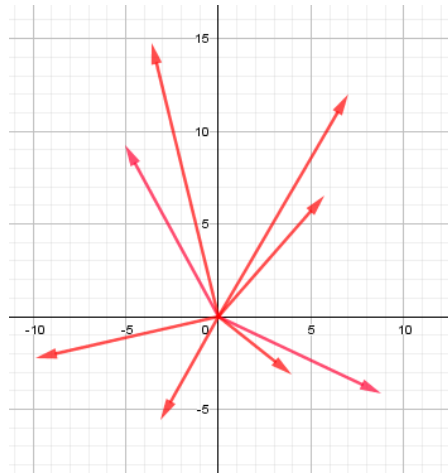
DEFINICIÓN 3.3

Los vectores de posición son aquellos cuyo origen coincide con el origen del plano cartesiano, también suele decirse que están anclados al origen del plano.

La figura 3.3 muestra un grupo de vectores de posición.

Figura 3.3

Representación gráfica de vectores de posición



Los vectores de posición tienen distintas representaciones, algunas de ellas son:

El vector de posición $\overrightarrow{OA}$ donde $O(0,0)$ y $A(-1,3)$

El vector de posición $\overrightarrow{OB}$ donde $O(0,0)$ y $B(-2,1)$

El vector de posición $\overrightarrow{OC}$ donde $O(0,0)$ y $C(3,4)$

Observe que, para el caso de los vectores de posición, no es necesario mencionar cuál es el origen, porque siempre es el mismo, $O(0,0)$. Por esta razón, los vectores de posición también suelen denotarse de la siguiente manera:

El vector de posición $\vec{A}$ donde $A(-1,3)$

El vector de posición $\vec{B}$ donde $B(-2,1)$

El vector de posición $\vec{C}$ donde $C(3,4)$

Fíjese que un vector de posición queda determinado completamente por su extremo.

Otra notación muy común para los vectores de posición es representarlos con letra minúscula con una flecha arriba, es decir:

El vector de posición $\vec{a}$ donde $A(-1,3)$

El vector de posición $\vec{b}$ donde $B(-2,1)$

El vector de posición $\vec{c}$ donde $C(3,4)$

En este sentido, para representar los vectores de posición escribiremos:

$$\vec{a} = (-1,3)$$

$$\vec{b} = (-2,1)$$

$$\vec{c} = (3,4)$$

Es común encontrar textos que utilicen las matrices columnas para denotar los vectores, en este caso se escribe:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Existe otra notación muy utilizada que veremos más adelante y que es común verla en los problemas de aplicaciones.

Vectores equipolentes

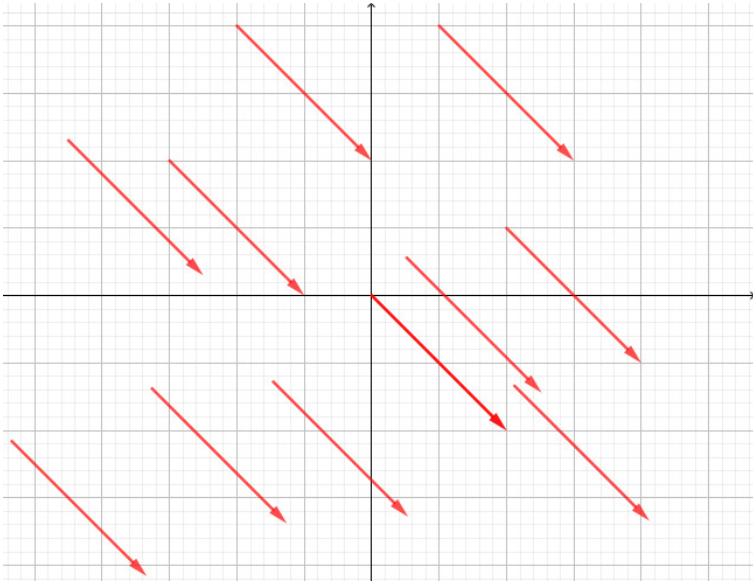
DEFINICIÓN 3.4

Dos o más vectores son equipolentes si tienen igual módulo y dirección.

En la figura 3.4 podemos encontrar un conjunto de vectores equipolentes.

Figura 3.4

Representación gráfica de vectores equipolentes



Coordenadas de un vector

DEFINICIÓN 3.5

Sea un vector libre $\overrightarrow{AB}$ con origen en el punto $A(x_1, y_1)$ y extremo en el punto $B(x_2, y_2)$. Las coordenadas del vector $\overrightarrow{AB}$ se definen como el par ordenado $C(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$.

Es decir, las encontramos al restar coordenada a coordenada, el extremo menos el origen del vector.

EJERCICIO 3.1

Determine las coordenadas del vector $\overrightarrow{AB}$ donde $A(-1, 2)$ y $B(2, 3)$.

SOLUCIÓN

Sabemos que,

$A(-1,2)$ es el origen del vector.

$B(2,3)$ es el extremo del vector.

Por lo tanto, las coordenadas del vector $\overrightarrow{AB}$ serán el punto C que se obtiene de restar el extremo menos el origen, es decir:

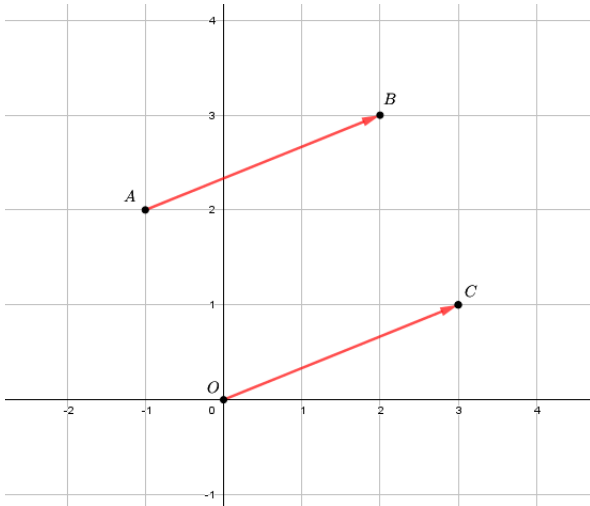
$$C(2 - (-1), 3 - 2)$$

$$C(3, 1)$$

Veamos una representación gráfica de esta situación en la figura 3.5, donde hemos graficado el vector libre $\overrightarrow{AB}$, sus coordenadas y un vector de posición cuyo extremo son las coordenadas del vector $\overrightarrow{AB}$.

Figura 3.5

Coordenadas del vector $\overrightarrow{AB}$



Como puede notarse, las coordenadas del vector $\overrightarrow{AB}$ representan el extremo de un vector de posición $\vec{c}$ que es equipolente a $\overrightarrow{AB}$.

Respecto a esto, hagamos algunas observaciones importantes que el lector puede verificar con facilidad:

- Todo vector libre tiene un vector de posición equipolente a él, y se encuentra hallando sus coordenadas.
- Desde una mirada gráfica, hallar las coordenadas de un vector significa trasladarlo hacia el origen del plano cartesiano.
- Los vectores equipolentes tienen las mismas coordenadas.
- Las coordenadas de un vector de posición coinciden con su extremo.

Cuando se trabaja con vectores, es común utilizar vectores de posición en lugar de vectores libres, en caso de tener estos últimos, lo primero que hacemos es hallar sus coordenadas (trasladarlos al origen) antes de operar con ellos.

Por ejemplo, si tenemos el vector libre $\overrightarrow{CD}$ con $C(1, -3)$ y $D(-2, 0)$, su vector de posición equipolente viene dado por:

$$\vec{e} = (-2 - 1, 0 - (-3))$$

$$\vec{e} = (-3, 3)$$

Módulo de un vector

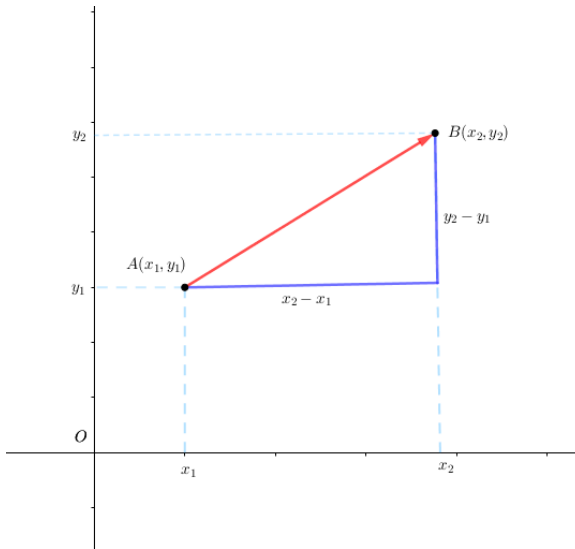
DEFINICIÓN 3.6

El módulo del vector, también conocido como longitud, magnitud o norma del vector, se entiende como el tamaño del segmento dirigido.

Para el caso del vector libre $\overrightarrow{AB}$ su módulo se denota por $\|\overrightarrow{AB}\|$. Para calcularlo solo necesitamos hallar la distancia que existe entre el origen y el extremo del vector. Para esto, veamos cómo calcular la distancia entre estos dos puntos:

Figura 3.6

Representación gráfica del módulo del vector $\overrightarrow{AB}$



En la figura 3.6 vemos un vector $\overrightarrow{AB}$ que tiene como origen el punto $A(x_1, y_1)$ y extremo el punto $B(x_2, y_2)$ y también se observa un triángulo rectángulo $\triangle ABC$ cuyos catetos miden $x_2 - x_1$ y $y_2 - y_1$, lo que nos interesa encontrar es el tamaño de la hipotenusa de este triángulo, que representará justamente $\|\overrightarrow{AB}\|$, para ello aplicamos el Teorema de Pitágoras obtenemos:

$$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Donde:

x_1 : Abscisa del origen.

x_2 : Abscisa del extremo.

y_1 : Ordenada del origen.

y_2 : Ordenada del extremo.

Con esta fórmula siempre podremos calcular la distancia que existe entre dos puntos cualesquiera del plano.

En caso de tener un vector de posición $\vec{a} = (x, y)$, Capitelli *et al.* (2020) demuestran con el Teorema de Pitágoras que:

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Veamos algunos problemas a continuación:

PROBLEMA 3.1

En una granja se desea construir una cerca que delimita dos superficies, los extremos de la cerca son los puntos $A(5, 6)$ $B(6, 20)$, la cerca será construida con postes de madera y cuatro hilas de alambre de púa, considerando que las unidades de medida están en metros, determine:

- Metros lineales de alambre de púa que se requieren para construir la cerca que delimita las dos superficies.
- Cantidad de postes de madera para construir la cerca. Considere que la separación entre ellas será de 1,25 m.

SOLUCIÓN

- Los extremos de la cerca que delimita las dos superficies los podemos representar como un vector libre de origen A y extremo B , de esta manera su módulo $\|\vec{AB}\|$ representará la distancia que existe entre ambos puntos, hallando el módulo de este vector tenemos:

$$\|\vec{AB}\| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Reemplazando valores

$$\|\vec{AB}\| = \sqrt{(6 - 5)^2 + (20 - 6)^2} = 14,03$$

Como la cerca tendrá cuatro hilas de alambre de púa, multiplicamos la distancia entre los dos puntos, que en este caso representa la longitud de la cerca, por cuatro.

$$14,03 \times 4 = 56,12 \text{ m}$$

Lo que significa que necesitamos 56,12 metros de alambre de púa para construir la cerca perimetral.

- b. Para responder este literal, debemos tomar en cuenta que al dividir un segmento en n partes iguales, el número de puntos sobre el segmento es igual a $n + 1$ (realice un gráfico para comprobar esta situación). Si aplicamos esta idea para determinar el número de postes de madera que necesitamos para construir la cerca podemos deducir la siguiente fórmula:

$$\# \text{ Postes} = \frac{l}{d} + 1$$

Donde:

l : Longitud de la cerca perimetral.

d : Distancia de separación entre las estacas.

Sustituyendo valores:

$$\# \text{ Postes} = \frac{14,03}{1,25} + 1 = 12,22$$

Es decir, necesitaríamos 12 postes para ubicarlos con una separación aproximada de 1,25 m.

PROBLEMA 3.2

La superficie de una parcela está representada por un triángulo cuyas coordenadas de los vértices son los puntos $A(5, 8)$, $B(10, 20)$ y $C(30, 6)$, considere que las unidades de medida de los puntos están en metros. Determine:

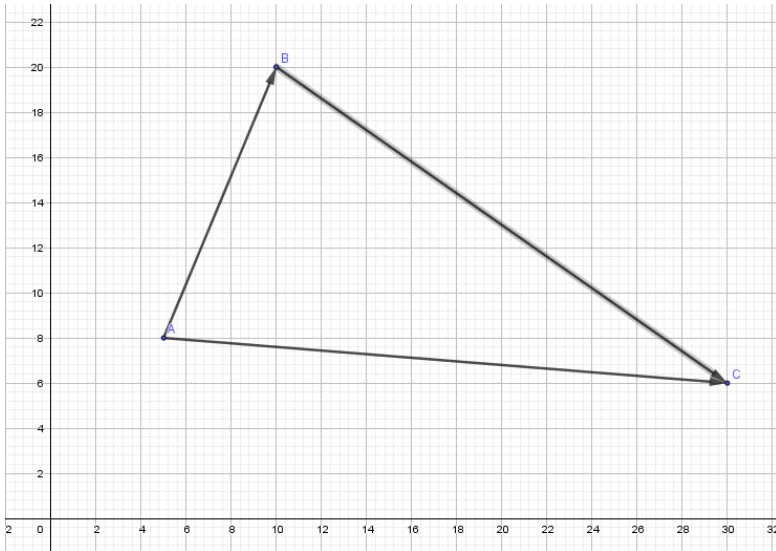
- El área de la parcela.
- El perímetro de la parcela.
- La cantidad de árboles de tomate que caben en la parcela si cada árbol requiere $3,5 \text{ m}^2$.

SOLUCIÓN

Veamos una representación gráfica del problema ubicando los puntos $A(5, 8)$, $B(10, 20)$ y $C(30, 6)$ en el plano cartesiano:

Figura 3.7

Representación gráfica del triángulo que se forma con los puntos $A(5, 8)$, $B(10, 20)$ y $C(30, 6)$



- a. El área de la parcela es igual al área del triángulo que se muestra en la figura 3.7.

Recordemos que en el capítulo 1 aprendimos a calcular el área de un triángulo mediante el uso de los determinantes con la siguiente fórmula:

$$A_{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}}{2}$$

Sustituyendo valores resulta:

$$A_{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 8 & 1 \\ 10 & 20 & 1 \\ 30 & 6 & 1 \end{vmatrix}}{2} = \frac{|-310|}{2} = 155$$

Por lo tanto, el área de la parcela es igual a 155 m².

- b. El perímetro p de la superficie será la suma del módulo de los vectores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ y $\overrightarrow{AC}$, es decir,

$$p = \|\overrightarrow{AB}\| + \|\overrightarrow{BC}\| + \|\overrightarrow{AC}\|$$

En este punto tenemos dos opciones, podríamos encontrar los vectores de posición equipolentes a cada uno de estos vectores libres y luego calcular el módulo de ellos para luego sumar, o bien, podemos calcular directamente el módulo de los vectores libres para luego sumar, esto último será lo que haremos. Si calculamos cada módulo por separado, obtenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} \|\overrightarrow{AB}\| &= \sqrt{(10-5)^2 + (20-8)^2} = 13 \\ \|\overrightarrow{BC}\| &= \sqrt{(30-10)^2 + (6-20)^2} = 24,41 \\ \|\overrightarrow{AC}\| &= \sqrt{(30-5)^2 + (6-8)^2} = 25,07 \end{aligned}$$

Reemplazando valores resulta:

$$p = 13 + 24,41 + 25,07 = 62,48$$

Luego, el perímetro de la parcela es igual a 62,48 m.

- c. Para calcular la cantidad de árboles de tomates que caben en la parcela procedemos a dividir el área de la superficie entre el área requerida por planta. Del problema sabemos que el área que requiere cada árbol es de 3,5 m², por lo tanto:

$$\# \text{Árboles de tomate} = \frac{A_{\Delta}}{\text{área requerida por árbol}}$$

$$\# \text{Árboles de tomate} = \frac{155m^2}{3,5m^2/\text{árbol}} = 44,29$$

Es decir, en esta parcela caben aproximadamente 44 árboles de tomate.

Dirección de un vector

La dirección de un vector es igual al ángulo que forma el vector desde el eje x positivo medido en contra de las agujas del reloj y puede ser calculado utilizando nociones básicas de trigonometría.

EJERCICIO 3.2

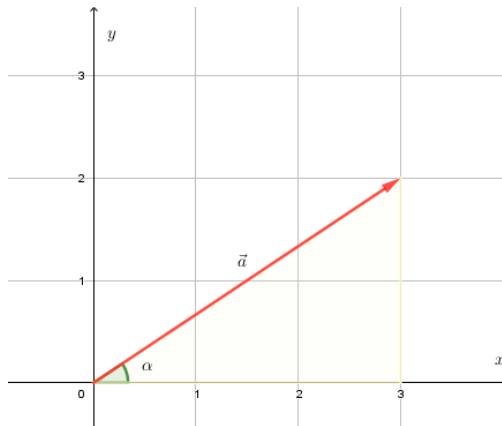
Determine la dirección del vector $\vec{a} = (3,2)$.

SOLUCIÓN

Al graficar este vector lo ubicamos en el primer cuadrante como puede verse en la figura 3.8

Figura 3.8

Representación gráfica del vector $\vec{a} = (3,2)$



La dirección del vector $\vec{a} = (3,2)$ se corresponde al ángulo α que forma con el eje x . Para calcularlo podemos aplicar conceptos básicos de trigonometría sobre el triángulo rectángulo que se forma. Luego,

$$\tan(\alpha) = \frac{2}{3}$$

$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)$$

Configurando nuestra calculadora en grados sexagesimales (*Degree*) obtenemos que:

$$\alpha = 33,69^\circ$$

Siendo esta la dirección del vector $\vec{a}$.

EJERCICIO 3.3

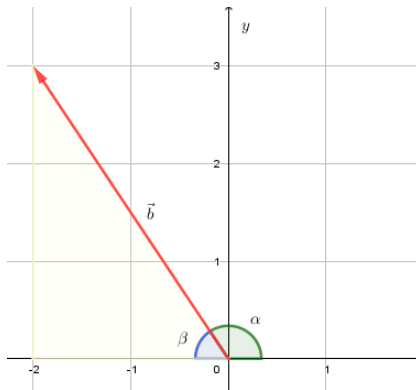
Determine la dirección del vector $\vec{b} = (-2,3)$.

SOLUCIÓN

La figura 3.9 ilustra nuestro problema.

Figura 3.9

Representación gráfica de la dirección del vector $\vec{b} = (-2,3)$



El gráfico del vector deja ver que su dirección es el ángulo α . Sin embargo, podemos notar que, al aplicar el mismo análisis del ejercicio 3.2, el ángulo que encontraremos será β . Este ángulo que encontraremos con la calculadora será referencial, y nos permitirá hallar α .

Del triángulo rectángulo resaltado en la figura 3.9 obtenemos que:

$$\tan(\beta) = \left| \frac{3}{-2} \right|$$

$$\beta = \tan^{-1} \left| \frac{3}{-2} \right|$$

$$\beta = 56,31^\circ$$

Observe que en este caso hemos utilizado el valor absoluto en el argumento de la tangente inversa, esto es porque estamos considerando una razón trigonométrica en un triángulo rectángulo, cuyos catetos son segmentos, obviamente positivos.

En el gráfico podemos ver con facilidad que para hallar la dirección α del vector solo aplicamos una resta:

$$\alpha = 180^\circ - \beta$$

$$\alpha = 180 - 56,31^\circ$$

$$\alpha = 123,69^\circ$$

Dejamos como ejercicio para el lector determinar la dirección de los vectores:

$$\vec{c}(-4, -3) \text{ y } \vec{d} = (3, -3).$$

Antes de intentar de resolver los ejercicios anteriores tome en cuenta las siguientes observaciones respecto a la dirección de un vector:

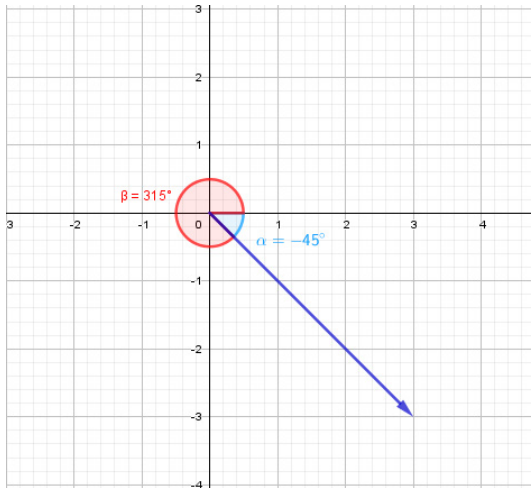
Si las coordenadas de un vector son $\vec{a} = (x, y)$, la fórmula $\alpha = \tan^{-1} \left| \frac{y}{x} \right|$ permite encontrar su dirección, pero no necesariamente coincide con su valor. Pueden presentarse cuatro casos, si representamos a la dirección del vector como θ , entonces:

- Caso 1. El vector está en el primer cuadrante, la dirección $\theta = \alpha$
- Caso 2. El vector está en el segundo cuadrante, la dirección $\theta = 180 - \alpha$
- Caso 3. El vector está en el tercer cuadrante, la dirección $\theta = 180 + \alpha$
- Caso 4. El vector está en el cuarto cuadrante, la dirección $\theta = 360 - \alpha$

Cuando los vectores se ubican en el cuarto cuadrante, es común representar su dirección como un ángulo agudo negativo (leyéndose en sentido horario). Por ejemplo, en lugar de escribir la dirección de un vector como 315° puede escribirse como -45° . La figura 3.10 ilustra esta situación:

Figura 3.10

Gráfica de la dirección del vector representado con ángulo agudo



PROBLEMA 3.3

En una granja se desea construir un canal de concreto con una retroexcavadora. El equipo parte desde un punto de referencia y llega

a un extremo marcando las coordenadas de un punto $B(-5, -4)$. Si la unidad de medida es el metro, determine:

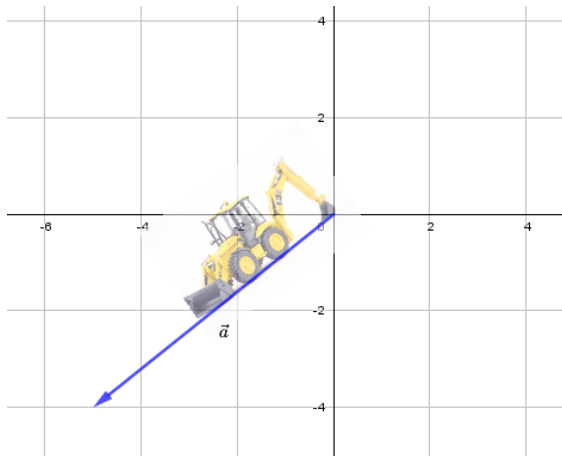
- La longitud del canal en metros.
- El volumen de la excavación (material retirado), en metros cúbicos, considere que el ancho y profundidad del canal será de 1,2 m y 1,5 m respectivamente.
- La dirección de la zanja realizada por la retroexcavadora.

SOLUCIÓN

- Tomemos el punto de referencia como el origen del plano cartesiano y tracemos el vector de posición $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, cuyas coordenadas son $\vec{a} = (-5, -4)$, ver figura 3.11.

Figura 3.11

Representación gráfica del trazado del vector $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$.



Si calculamos el módulo del vector $\vec{a}$ encontramos la longitud del canal.

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Sustituyendo valores:

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{(-5)^2 + (-4)^2} = 6,40$$

Es decir, la longitud del canal será de 6,40 metros.

- b. Para responder a este literal simplemente multiplicamos la longitud del canal por el ancho y la profundidad, es decir aplicando la ecuación:

$$\text{Volumen del canal} = \text{largo} \cdot \text{ancho} \cdot \text{profundidad}$$

Al sustituir valores:

$$\text{Volumen del canal} = 6,40 \cdot 1,20 \cdot 1,50 = 11,52$$

Es decir, el volumen del material retirado es de 11,52 m³.

- c. Para calcular la dirección de la zanja procedemos a calcular la dirección del vector. Tomando en cuenta que el vector $\vec{a} = (-5, -4)$ está ubicado en el tercer cuadrante, su dirección será

$$\theta = 180 + \alpha$$

Primero, calcularemos α

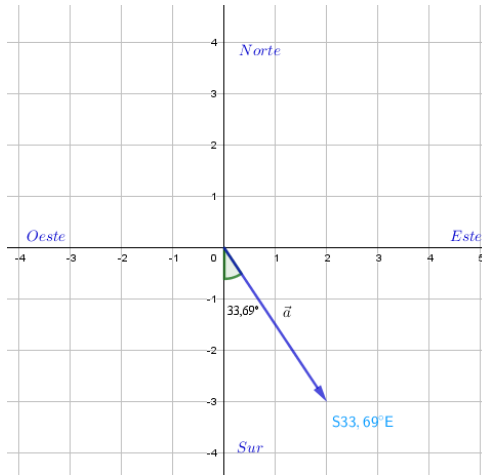
$$\alpha = \tan^{-1} = \left| \frac{-4}{-5} \right| = 38,65^\circ$$

Ahora $\theta = 180 + 38,65 = 218,65^\circ$, es decir, la dirección del canal es de 218,65° respecto al punto de referencia de partida.

La dirección de un vector también suele representarse en términos de los puntos cardinales; norte, sur, este y oeste. Por ejemplo, podemos escribir, S33,69°E, lo que significa que desde el sur hacia el este el vector forma un ángulo de 33,69°, en la figura 3.12 puede apreciarse la representación gráfica de este ejemplo.

Figura 3.12

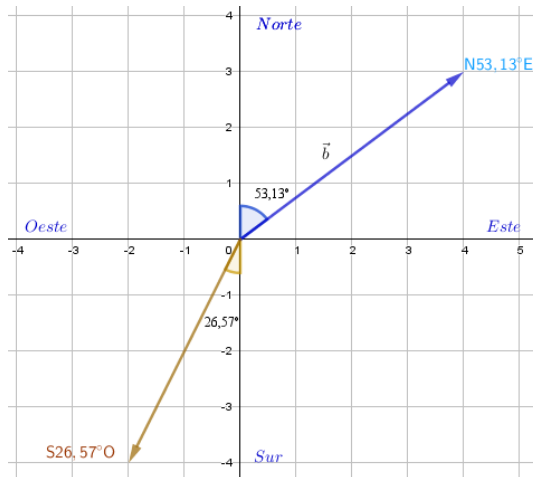
Representación del vector $\vec{a}$ en puntos cardinales



En la figura 3.13 pueden verse otros vectores cuyas direcciones se representan utilizando esta notación:

Figura 3.13

Representación gráfica de otros vectores en puntos cardinales



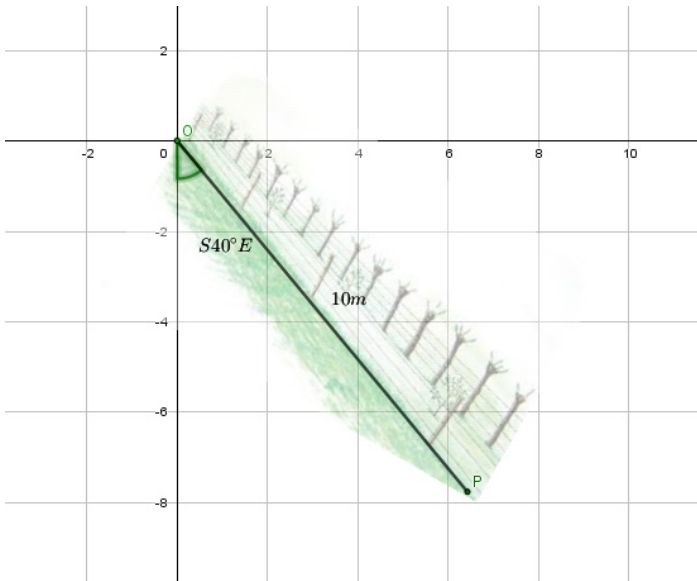
Para expresar $N45^\circ E$ simplemente podemos escribir Noreste, lo propio ocurre con Noroeste ($N45^\circ O$), Sureste ($S45^\circ E$) y Suroeste ($S45^\circ O$).

PROBLEMA 3.4

En una finca la dirección de una cerca respecto a un punto de referencia es de $S40^\circ E$, figura 3.13. Si la longitud de la cerca es de 10 m, determine las coordenadas del extremo final de la cerca.

Figura 3.14

Representación gráfica de la dirección de la cerca con puntos de referencia $S40^\circ E$

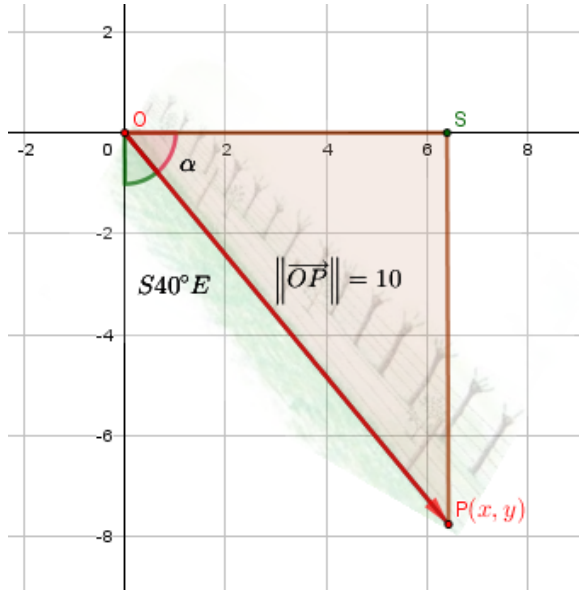


SOLUCIÓN

A partir de la figura 3.14 podemos construir el triángulo rectángulo $\triangle OPS$ cuya hipotenusa será el vector de posición $\overrightarrow{OP}$ y cuyo módulo sabemos que es 10. Esta ilustración puede verse en la figura 3.15.

Figura 3.15

Representación gráfica del triángulo rectángulo $\triangle OPS$, con hipotenusa vector de posición $\vec{OP}$



El ángulo α es el complemento (lo que le falta para llegar a 90°) de la dirección del vector $\vec{OP}$, por lo tanto,

$$\alpha = 90 - 40 = 50^\circ$$

Utilizando las razones trigonométricas del seno y el coseno sobre el triángulo $\triangle OPS$ podemos determinar la longitud de los catetos $\vec{OS}$ y $\vec{SP}$ que representan las coordenadas x y y respectivamente del extremo final de la cerca que estamos buscando (punto P).

Luego,

$$\text{sen}(\alpha) = \frac{y}{\|\vec{OP}\|} \quad y = \|\vec{OP}\| \cdot \text{sen}(\alpha)$$

$$\cos(\alpha) = \frac{x}{\|\vec{OP}\|} \quad x = \|\vec{OP}\| \cdot \cos(\alpha)$$

Sustituyendo valores,

$$x = 10 \cdot \cos(50^\circ) = 6,43$$

$$y = 10 \cdot \sin(50^\circ) = 7,66$$

Por lo tanto, el extremo de la cerca tiene coordenadas:

$$P(6,43 ; 7,66)$$

Operaciones con vectores en $\mathbb{R}^2$

Hasta ahora conocemos los vectores, sus elementos y la notación que utilizamos para representarlos. En este apartado veremos cómo podemos operar los vectores desde un punto de vista gráfico y analítico y conoceremos una nueva notación para los vectores.

Producto de un escalar por un vector en $\mathbb{R}^2$

DEFINICIÓN 3.7

Sea un vector con coordenadas $\vec{a} = (x, y)$ y el escalar $k \in \mathbb{R}$, se define el producto de un escalar k por un vector $\vec{a}$, como:

$$k \cdot \vec{a} = k \cdot (x, y)$$

$$k \cdot \vec{a} = (k \cdot x, k \cdot y)$$

Es decir, el escalar multiplica a cada una de las coordenadas del vector. Veamos un ejercicio.

EJERCICIO 3.4

Sea el vector $\vec{a} = (-2, 4)$. Determine:

a. $2 \cdot \vec{a}$

b. $-\frac{1}{2} \cdot \vec{a}$

SOLUCIÓN

a. $2 \cdot \vec{a} = 2 \cdot (-2, 4) = (-4, 8)$

b. $-\frac{1}{2} \cdot \vec{a} = -\frac{1}{2} \cdot (-2, 4) = (1, -2)$

Desde un punto de vista gráfico, el escalar $k \in \mathbb{R}$ que multiplica al vector, modifica su módulo y dirección de acuerdo con el siguiente resumen:

- Si el escalar es igual a cero ($k = 0$) el vector se anula, es decir sus coordenadas se vuelven cero.
- Si el escalar es igual a uno ($k = 1$) el módulo y la dirección del vector se mantienen iguales.
- Si el escalar es mayor a uno ($k > 1$) el módulo del vector aumenta en la proporción del escalar y la dirección se mantiene igual.
- Si el escalar es mayor a cero y menor a uno ($0 < k < 1$) el módulo disminuye en la proporción del escalar y su dirección se mantiene igual.
- Si el escalar es igual a menos uno ($k = -1$) el módulo del vector se mantiene igual y la dirección aumenta 180° , es decir, se invierte.
- Si el escalar es menor a menos uno ($k < -1$) el módulo del vector aumenta en la proporción del escalar y su dirección aumenta 180° , es decir, se invierte.
- Si el escalar es mayor a menos uno y menor a cero ($-1 < k < 0$) su módulo disminuye en la proporción del escalar y su dirección aumenta 180° , es decir, se invierte.

Es importante notar que, cuando multiplicamos un vector por un escalar $k \neq 0$ siempre resulta un vector paralelo a este, y decimos que estos vectores son múltiplos escalares.

“Si dos vectores son paralelos entonces son múltiplos escalares, y viceversa”.

En la figura 3.16 podemos ver el vector $\vec{a} = (1,2)$ que ha sido multiplicado por diferentes escalares que lo han hecho cambiar según lo descrito arriba, además se han graficado vectores libres equipolentes a estos para visualizar mejor el paralelismo entre ellos y el comportamiento de cada vector respecto a su módulo y dirección.

Figura 3.16

Gráfica del vector $\vec{a} = (1,2)$ multiplicado por diferentes escalares



Resolvamos el problema 3.5.

PROBLEMA 3.5

El área de una finca cuya forma es triangular está representada por los vectores $\vec{a} = (9,0)$ y $\vec{b} = (0,15)$, si la unidad de medida es metros y se requiere que el área sea cuatro veces mayor, determine:

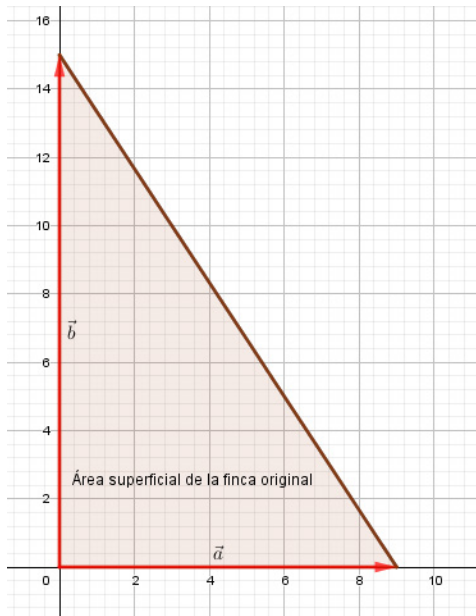
- Las nuevas coordenadas de los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$.
- El área en m^2 de nueva superficie.

SOLUCIÓN

En la figura 3.17 se muestra un gráfico del problema:

Figura 3.17

Representación gráfica del triángulo que se forma con los vectores $\vec{a} = (9,0)$ y $\vec{b} = (0,15)$



- a. Para que el área de la finca sea cuatro veces mayor podemos duplicar la longitud de cada lado ¿por qué?, esto lo podemos hacer multiplicando por 2 los vectores de posición $\vec{a}$ y $\vec{b}$ resultando $\vec{a}'$ y $\vec{b}'$ respectivamente.

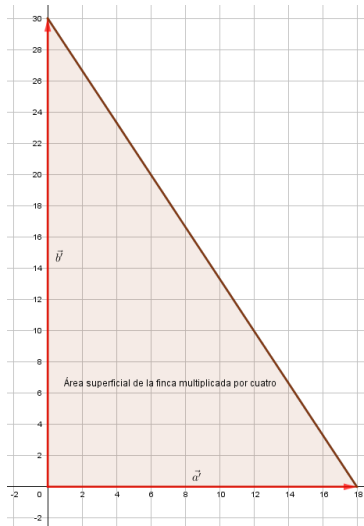
$$\vec{a}' = 2\vec{a} = 2(9,0) = (18,0)$$

$$\vec{b}' = 2\vec{b} = 2(0,15) = (0,30)$$

La figura 3.18 muestra cómo quedaría la superficie de la nueva finca:

Figura 3.18

Nueva superficie representada por los nuevos vectores



- b. Como la superficie de la finca está determinada por un triángulo rectángulo podemos calcular su área fácilmente:

$$A_{\Delta} = \frac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2}$$

Del gráfico del problema puede verse que:

$$base = \|\vec{a}\|$$

$$Altura = \|\vec{b}\|$$

Luego,

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{18^2 + 0^2} = 18$$

$$\|\vec{b}\| = \sqrt{0^2 + 30^2} = 30$$

Sustituyendo valores:

$$A_{\Delta} = \frac{18 \cdot 30}{2} = 270$$

Es decir, el área es 270 m^2 .

Vectores unitarios

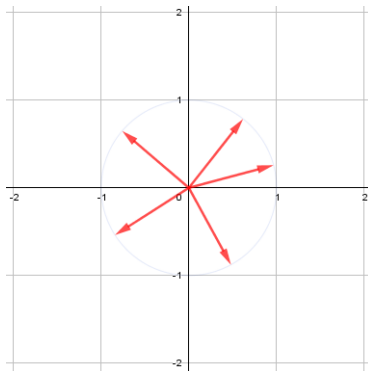
DEFINICIÓN 3.8

Diremos que un vector es unitario si su módulo es igual a 1.

La figura 3.19 muestra algunos vectores unitarios.

Figura 3.19

Representación gráfica de vectores unitarios



Los vectores unitarios suelen representarse con un sombrero en lugar de una flecha, por ejemplo, escribimos:

El vector unitario $\hat{a}$

El vector unitario $\hat{b}$

Dado un vector cualquiera, siempre es posible “unitarizarlo” multiplicándolo por el inverso de su módulo, esto es equivalente a dividir cada una de sus coordenadas por su módulo.

Demostremos la proposición anterior:

Sea el vector $\vec{a} = (x, y)$. El módulo de este vector es $\|\vec{a}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Calculemos el vector $\hat{a}$ (unitario) dividiendo cada coordenada por su módulo:

$$\hat{a} = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right)$$

Ahora hallemos el módulo de este vector:

$$\|\hat{a}\| = \sqrt{\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right)^2 + \left(\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right)^2}$$

$$\|\hat{a}\| = \sqrt{\frac{x^2}{x^2 + y^2} + \frac{y^2}{x^2 + y^2}}$$

$$\|\hat{a}\| = \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2}}$$

$$\|\hat{a}\| = 1$$

Efectivamente vemos que el vector $\hat{a}$ es unitario.

De una forma más compacta se puede escribir $\hat{a} = \frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|}$ en lugar de $\hat{a} = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \right)$

EJERCICIO 3.5

Determine un vector unitario en la dirección del vector $\vec{b} = (-2, 5)$

SOLUCIÓN

Hallamos el módulo del vector:

$$\|\vec{b}\| = \sqrt{(-2)^2 + 5^2}$$

$$\|\vec{b}\| = \sqrt{(-2)^2 + 5^2}$$

$$\|\vec{b}\| = \sqrt{4 + 25}$$

$$\|\vec{b}\| = \sqrt{29}$$

Luego, el vector unitario $\hat{b}$ lo hallamos dividiendo cada coordenada por el módulo de $\vec{b}$.

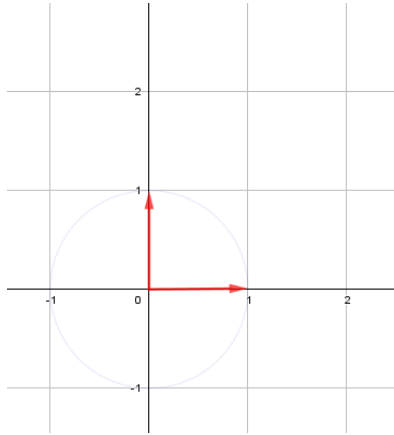
$$\hat{b} = \left(\frac{-2}{\sqrt{29}}, \frac{5}{\sqrt{29}} \right)$$

El lector puede verificar que este vector efectivamente es unitario ¿cómo?

Existen dos vectores unitarios muy utilizados al momento de representar un vector. Estos vectores son definidos por $\hat{i} = (1, 0)$ y $\hat{j} = (0, 1)$. Como puede notar en la figura 3.20 estos vectores además de tener módulo 1 también son perpendiculares entre sí. El vector $\hat{i}$ apunta en la dirección del eje x positivo y el vector $\hat{j}$ apunta en la dirección del eje y positivo. Veremos más adelante que todo vector de $\mathbb{R}^2$ puede escribirse en términos de estos dos vectores unitarios.

Figura 3.20

Vectores unitarios definidos como $\hat{i} = (1,0)$ y $\hat{j} = (0,1)$



Suma de vectores en $\mathbb{R}^2$

Es decir, sumamos las coordenadas de los vectores una a una.

DEFINICIÓN 3.9

Sean los vectores con coordenadas $\vec{a} = (x_1, y_1)$ y $\vec{b} = (x_2, y_2)$, se define la suma de $\vec{a}$ y $\vec{b}$ como:

$$\vec{a} + \vec{b} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

EJERCICIO 3.6

Dados los vectores con coordenadas $\vec{a} = (2, -3)$ y $\vec{b} = (-5, 1)$, determine el vector $\vec{a} + \vec{b}$. Realice el gráfico correspondiente.

SOLUCIÓN

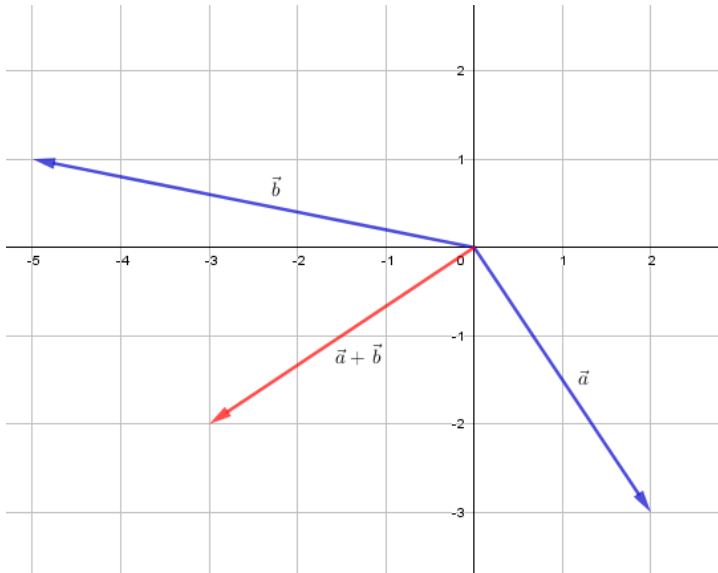
$$\vec{a} + \vec{b} = (2 + (-5), -3 + 1)$$

$$\vec{a} + \vec{b} = (-3, -2)$$

En la figura 3.21 pueden verse los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{a} + \vec{b}$

Figura 3.21

Gráfica de los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{a} + \vec{b}$



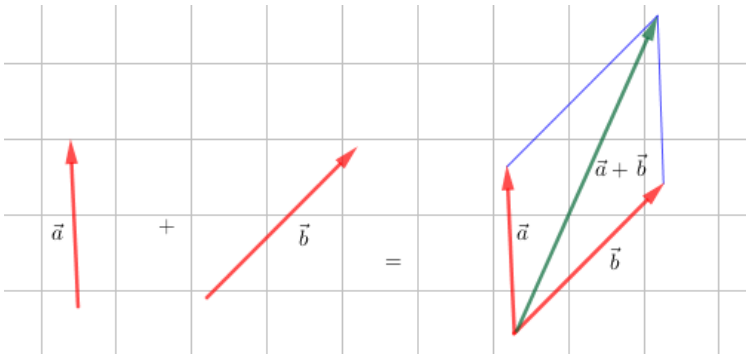
Veamos ahora dos formas gráficas para sumar vectores.

Regla del paralelogramo

Desde un punto de vista gráfico, si queremos sumar dos vectores cualesquiera, solo debemos unir el origen de uno con el origen del otro y construir un paralelogramo, la diagonal principal que sale del origen común y llega al vértice opuesto del paralelogramo será el vector suma (Poole, 2017). Ver figura 3.22.

Figura 3.22

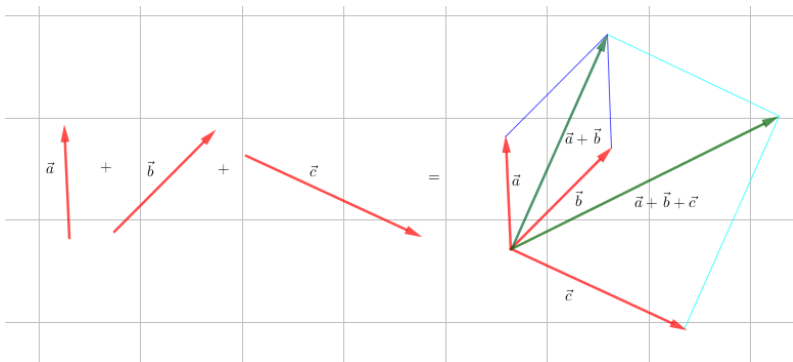
Representación gráfica del vector suma regla del paralelogramo



Si quisiéramos sumar un tercer vector $\vec{c}$, tendríamos que sumárselo al vector $\vec{a} + \vec{b}$ (vector verde en la figura 3.22). En la figura 3.23 podemos visualizar esta situación:

Figura 3.23

Representación gráfica del vector $\vec{c}$ sumado a los vectores $\vec{a} + \vec{b}$



Siguiendo este mismo análisis podemos sumar gráficamente tantos vectores como queramos aplicando la regla del paralelogramo, pero fíjese que solo podemos sumar de dos en dos.

Veamos ahora un ejercicio de suma de vectores aplicando el método analítico y el método gráfico para que comparemos los resultados.

EJERCICIO 3.7

Dados los vectores con coordenadas $\vec{a} = (-2, 3)$ y $\vec{b} = (4, -2)$, determine gráfica y analíticamente el vector suma $\vec{a} + \vec{b}$.

SOLUCIÓN

Desde un punto de vista analítico tenemos:

$$\vec{a} + \vec{b} = (-2, 3) + (4, -2)$$

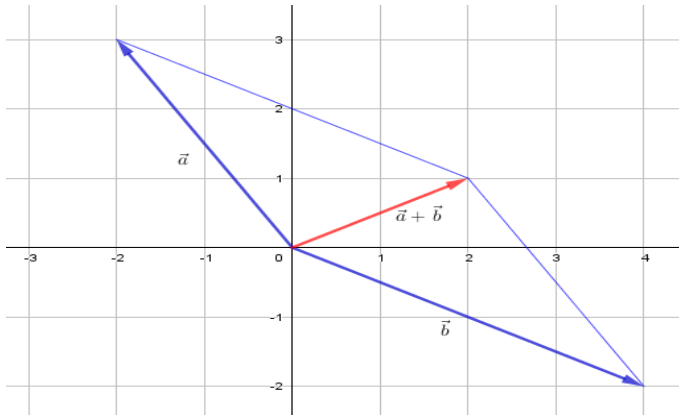
$$\vec{a} + \vec{b} = (-2 + 4, 3 - 2)$$

$$\vec{a} + \vec{b} = (2, 1)$$

Desde el punto de vista gráfico, vemos que ambos vectores son de posición y que al ubicarlos en el plano cartesiano sus orígenes coinciden, por lo tanto, solo debemos construir el paralelogramo y trazar el vector suma como se muestra en la figura 3.24.

Figura 3.24

Construcción del paralelogramo traza el vector suma $\vec{a} + \vec{b}$



Como vemos el vector resultante coincide con el cálculo hecho de manera analítica. Resolvamos el problema 3.6.

PROBLEMA 3.6

La superficie de una parcela está representada por el paralelogramo generado por los vectores $\vec{a} = (3,2)$ y $\vec{b} = (2,6)$. Dicha superficie se desea dividir en dos partes mediante una diagonal que represente una cerca medida en metros, determine:

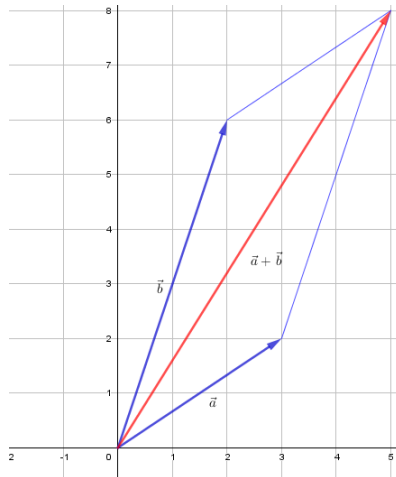
- La longitud de la cerca.
- La cantidad de alambre de púas si la cerca estuviese conformada por 5 hileras.
- La cantidad de postes si entre ellos hubiese 1,25 m de separación.

SOLUCIÓN

- Grafiquemos los vectores $\vec{a} = (3,2)$ y $\vec{b} = (2,6)$ y realicemos la suma de ellos aplicando la regla del paralelogramo. El vector suma representará la cerca y su magnitud la longitud de la cerca. La figura 3.25 muestra la gráfica del problema.

Figura 3.25

Gráfica del paralelogramo que se forma por los vectores $\vec{a} = (3,2)$ y $\vec{b} = (2,6)$



Calculemos la suma de los vectores $\vec{a} = (3,2)$ y $\vec{b} = (2,6)$ que como puede verse directamente en la figura 3.25 viene dada por:

$$\vec{a} + \vec{b} = (5,8)$$

El módulo de $\vec{a} + \vec{b}$ representará la longitud de la cerca perimetral:

$$\|\vec{a} + \vec{b}\| = \sqrt{5^2 + 8^2}$$

$$\|\vec{a} + \vec{b}\| = \sqrt{106}$$

$$\|\vec{a} + \vec{b}\| = 9,43$$

Es decir, la longitud de la cerca es de 9.43 m.

- b. Para determinar la cantidad en metros de alambre de púas procedemos a multiplicar la longitud de la cerca por las 5 hileras, es decir:

$$9,43 \times 5 = 47,15$$

Por lo tanto, se necesitan 47,15 m de alambre de púas.

- c. Para responder a este literal recordemos que:

$$\# \text{ Estacas} = \frac{\text{longitud de la cerca}}{\text{distancia de sepación}} + 1$$

$$\# \text{ Estacas} = \frac{47,15}{1,25} + 1 = 37,72$$

Por lo tanto, se necesitarán aproximadamente 38 postes.

Regla del polígono

Veamos otra forma de sumar vectores gráficamente. Digamos que queremos sumar dos o más vectores cualesquiera, la ley del polígono nos dice que unamos todos los vectores de modo que el extremo

de cada uno sea el origen de otro, y el vector resultante será el vector que cierra el polígono, es decir, el que parte desde el origen del primer vector al extremo del último. Veamos algunos ejemplos gráficos.

Figura 3.26

Representación gráfica suma de los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ regla del polígono

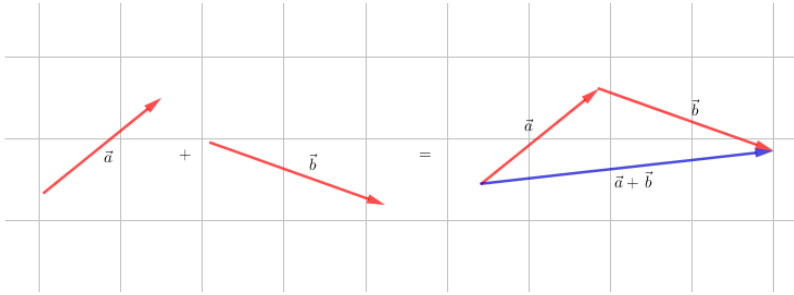


Figura 3.27

Representación gráfica suma de los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ regla del polígono

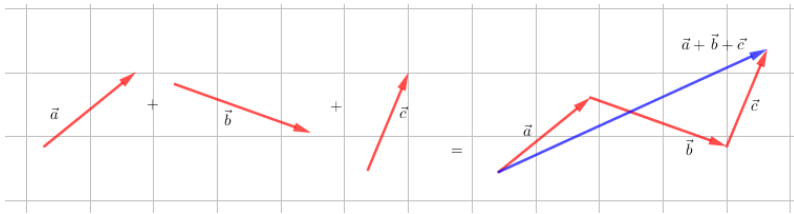
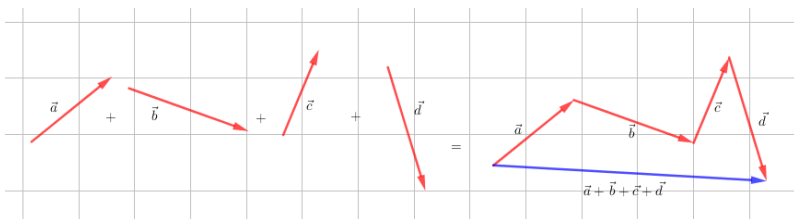


Figura 3.28

Representación gráfica suma de los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ y $\vec{d}$ regla del polígono



Las figuras 3.26, 3.27 y 3.28 muestran cómo pueden sumarse 2, 3 y 4 vectores aplicando la ley del polígono. El lector podrá notar

la ventaja que tiene este método sobre la regla del paralelogramo cuando tenemos que sumar gráficamente tres o más vectores. Para el caso particular, donde la suma es de dos vectores (figura 3.26), el polígono que se forma es un triángulo. Por ello, es común que se le llame en estos casos *regla del triángulo* para la suma de dos vectores.

PROBLEMA 3.7

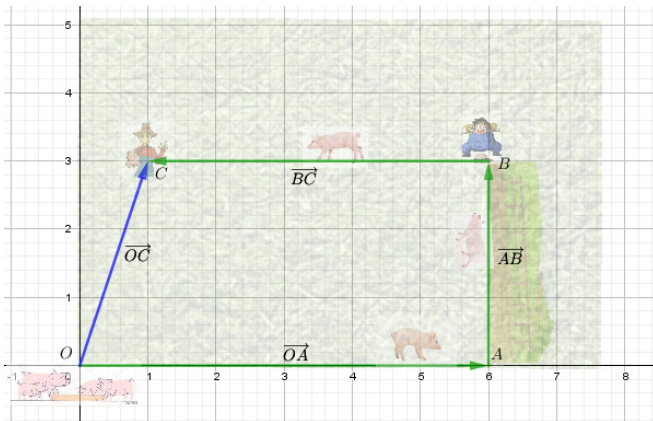
Un cerdo se escapa de su corral y al salir rápidamente corre 6 metros al este donde se encuentra una cerca que lo obliga a correr 3 metros en dirección norte hasta encontrarse con el granjero que lo hace girar al oeste y correr 5 metros donde el hijo del granjero lo captura ¿a qué distancia del corral capturó el hijo del dueño al cerdo?

SOLUCIÓN

En la figura 3.29 puede apreciarse el recorrido del cerdo a lo largo de los vectores $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{AB}$, y $\overrightarrow{BC}$. El módulo del vector $\overrightarrow{OC}$ representa la distancia desde el corral hasta el punto donde el hijo del granjero capturó al cerdo.

Figura 3.29

Recorrido del cerdo a lo largo de los vectores $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{AB}$, y $\overrightarrow{BC}$



Si aplicamos la regla del polígono podemos ver que:

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$$

Del gráfico podemos ver que $\overrightarrow{OC} = (1,3)$. Dejamos como ejercicio para el lector calcular las coordenadas de los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{BC}$ y resolver la suma de arriba para que verifique analíticamente las coordenadas de $\overrightarrow{OC}$.

Finalmente, calculamos $\|\overrightarrow{OC}\|$

$$\|\overrightarrow{OC}\| = \sqrt{1^2 + 3^2}$$

$$\|\overrightarrow{OC}\| = \sqrt{1+9}$$

$$\|\overrightarrow{OC}\| = \sqrt{10}$$

$$\|\overrightarrow{OC}\| = 3,162$$

Por lo tanto, la distancia desde el corral hasta el punto donde el hijo del granjero capturó al cerdo fue de 3,16 m.

Resta de vectores en R^2

DEFINICIÓN 3.10

Sean los vectores con coordenadas $\vec{a} = (x_1, y_1)$ y $\vec{b} = (x_2, y_2)$, se define la resta de $\vec{a}$ y $\vec{b}$ como:

$$\vec{a} - \vec{b} = (x_1 - x_2, y_1 - y_2)$$

EJERCICIO 3.8

Dados los vectores con coordenadas $\vec{a} = (-4,4)$ y $\vec{b} = (2,3)$, determine el vector $\vec{a} - \vec{b}$. Realice el gráfico correspondiente.

SOLUCIÓN

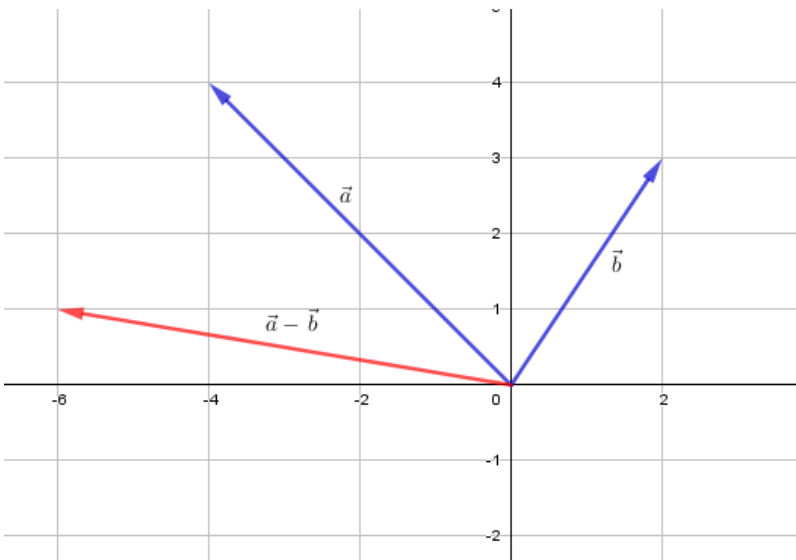
$$\vec{a} - \vec{b} = (-4 - 2, 4 - 3)$$

$$\vec{a} - \vec{b} = (-6, 1)$$

En la figura 3.30 pueden verse los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{a} - \vec{b}$

Figura 3.30

Representación gráfica de los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{a} - \vec{b}$



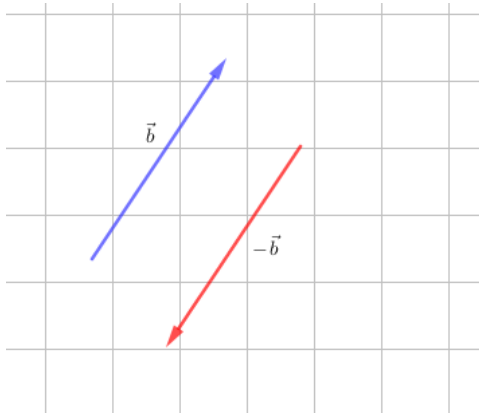
Para restar vectores debemos tomar en cuenta que la resta de dos vectores puede convertirse en una suma tal como mostramos a continuación:

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$$

Donde $-\vec{b}$ representa el vector $\vec{b}$ multiplicado por el escalar -1, que como indicamos antes, el módulo del vector se mantiene igual y su dirección aumenta 180° , es decir, se invierte. En la figura 3.31 vemos el gráfico de los vectores libres $\vec{b}$ y $-\vec{b}$.

Figura 3.31

Representación gráfica de los vectores libres $\vec{b}$ y $-\vec{b}$



Tomando en cuenta esta idea, para restar vectores podemos aplicar las mismas reglas de la suma de vectores: ley de paralelogramo o ley del polígono. Veamos un ejercicio.

EJERCICIO 3.9

Dados los vectores con coordenadas $\vec{a} = (-3, 1)$ y $\vec{b} = (-2, 4)$. Determine la resta $\vec{a} - \vec{b}$ analítica y gráficamente.

SOLUCIÓN

Analíticamente,

$$\vec{a} - \vec{b} = (-3, 1) - (-2, 4)$$

$$\vec{a} - \vec{b} = (-3 - (-2), 1 - 4)$$

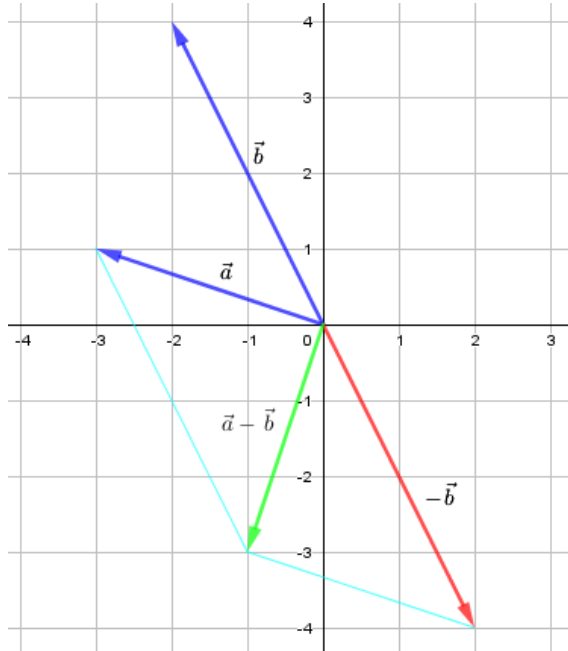
$$\vec{a} - \vec{b} = (-1, -3)$$

Gráficamente, hemos ubicado en el plano cartesiano los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $-\vec{b}$, y luego aplicamos la regla del paralelogramo para sumar $\vec{a}$

y $-\vec{b}$ (figura 3.32) y cuyo resultado vemos que efectivamente coincide con la resta analítica.

Figura 3.32

Gráfica de los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $-\vec{b}$ suma de los vectores $\vec{a}$ y $-\vec{b}$

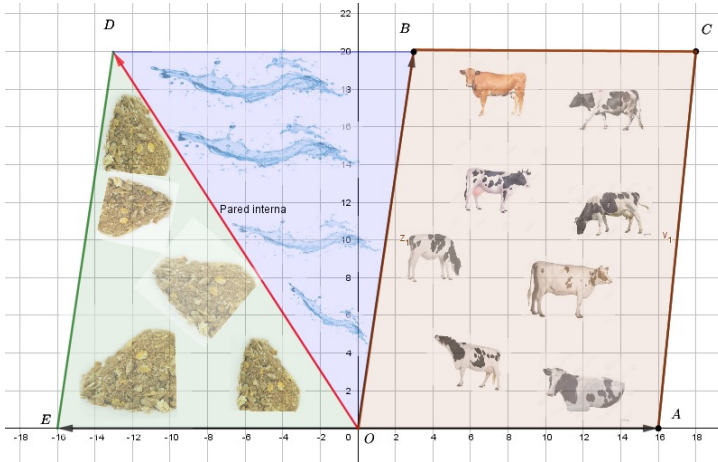


PROBLEMA 3.8

En una granja, la superficie de un establo para vacas está delimitada por los puntos $O(0,0)$, $A(16,0)$, $B(3,20)$ y $C(18,20)$, donde las longitudes están medidas en metros. El dueño decide construir una bodega de 1,5 metros de altura junto al establo y con sus mismas dimensiones para almacenamiento de balanceado y agua. Para separar el agua del balanceado, el propietario construirá una pared interna tal como se muestra en la figura 3.33.

Figura 3.33

Representación gráfica de la pared interna para separar el agua del balanceado



- Determine la longitud de la pared interna de la bodega.
- Calcule el volumen del depósito de agua.

SOLUCIÓN

En el problema identificamos los vectores de posición:

$$\overrightarrow{OA} = (16,0)$$

$$\overrightarrow{OB} = (3,20)$$

- De la figura 3.33 podemos ver que el módulo del vector $\overrightarrow{OD}$ representará la longitud de la pared. Además, por la regla del paralelogramo sabemos que:

$$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OE}$$

Pero como $\overrightarrow{OE} = -\overrightarrow{OA}$ resulta

$$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OB} + (-\overrightarrow{OA})$$

O bien,

$$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$$

Sustituyendo valores,

$$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (3,20) - (16,0)$$

$$\overrightarrow{OD} = (-13,20)$$

Calculamos el módulo del vector $\overrightarrow{OD}$

$$\|\overrightarrow{OD}\| = \sqrt{(-13)^2 + 20^2} = 23,85$$

Por lo tanto, la longitud de la pared interna de la bodega es de 23,85 m.

- b. Para calcular el volumen del depósito de agua debemos encontrar el área del triángulo $\triangle BOD$ y multiplicarlo por la altura del depósito, que en este caso es 1,5 metros. Luego,

$$V = 1,5 \cdot A_{\triangle BOD}$$

Sabemos que,

$$A_{\triangle BOD} = \frac{1}{2} \cdot \text{base} \cdot \text{altura}$$

De la figura 3.32 vemos que en el triángulo $\triangle BOD$ la altura es 20 y la base es 16, luego,

$$A_{\triangle BOD} = \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 16$$

$$A_{\triangle BOD} = 160$$

Luego,

$$V = 1,5 \cdot 160$$

$$V = 240$$

Por lo tanto,

El volumen del depósito de agua es de 240 m².

Producto escalar de vectores en R^2

El producto escalar entre dos vectores en R^2 , también conocido como producto punto, es representado por un escalar (Grossman, 2019), que definimos a continuación:

Sean los vectores con coordenadas $\vec{a} = (x_1, y_1)$ y $\vec{b} = (x_2, y_2)$, el producto escalar (o producto punto) entre $\vec{a}$ y $\vec{b}$ se define como:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2$$

- Observe que el punto que está a la izquierda no es igual al de la derecha, uno representa el producto de dos vectores y mientras el otro el producto de dos escalares.
- Observe que el producto escalar resulta ser precisamente un escalar, de allí el origen de su nombre.
- Es muy común que el producto escalar sea conocido como producto punto en alusión al símbolo que se utiliza para representarlo, un punto.

EJERCICIO 3.10

Dados los vectores con coordenadas $\vec{a} = (-2, 3)$ y $\vec{b} = (-4, -1)$, determine $\vec{a} \cdot \vec{b}$.

SOLUCIÓN

Aplicando la definición tenemos:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (-2, 3) \cdot (-4, -1)$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = -2 \cdot (-4) + 3 \cdot (-1)$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 8 - 3$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 5$$

Módulo de un vector en términos del producto escalar

Sabemos que el módulo de un vector de posición con coordenadas $\vec{a} = (x, y)$ viene dado por $\|\vec{a}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Con la definición que acabamos de ver podemos definir el módulo de un vector en función al producto escalar de la siguiente forma:

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}$$

EJERCICIO 3.11

Determine el módulo del vector con coordenadas $\vec{a} = (-2, 3)$.

SOLUCIÓN

Aplicando la definición que acabamos de ver tenemos:

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}$$

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{(-2, 3) \cdot (-2, 3)}$$

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{4 + 9}$$

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{13}$$

Otra definición del producto escalar

El producto escalar de vectores también es definido en forma equivalente en función del módulo de los vectores y del ángulo que forman entre ellos.

DEFINICIÓN 3.11

Sean $\vec{a}$ y $\vec{b}$ dos vectores en $\mathbb{R}^2$ diferentes de cero y θ el ángulo que forman entre ellos, entonces:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \cos\theta$$

Tomado de Galdeano *et al.* (2017)

Resolvamos el ejercicio 3.10 aplicando esta definición y comparemos resultados.

EJERCICIO 3.12

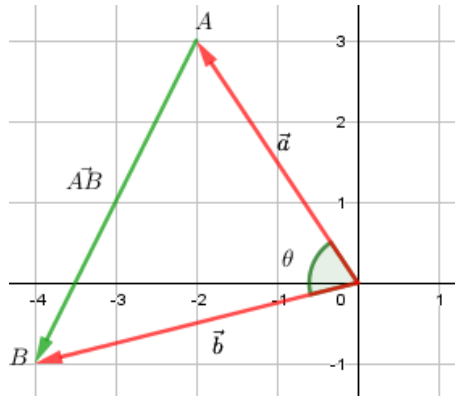
Dados los vectores con coordenadas $\vec{a} = (-2, 3)$ y $\vec{b} = (-4, -1)$, determine $\vec{a} \cdot \vec{b}$.

SOLUCIÓN

Realicemos un gráfico que represente los dos vectores y ubiquemos el ángulo que forman entre ellos.

Figura 3.34

Representación gráfica de los vectores de posición $\vec{a}$ y $\vec{b}$, construcción del triángulo trazando un tercer vector libre $\overrightarrow{AB}$



Como podemos observar en la figura 3.34 al ubicar los vectores de posición $\vec{a}$ y $\vec{b}$ podemos construir un triángulo trazando un tercer vector libre $\overrightarrow{AB}$ cuyo origen y extremo se corresponden con las coordenadas de $\vec{a}$ y $\vec{b}$ respectivamente.

Lo que haremos será calcular el módulo de estos tres vectores para luego aplicar la ley del coseno para hallar el ángulo θ , teniendo esto ya podemos aplicar nuestra segunda fórmula para el producto escalar.

$$\vec{a} = (-2, 3)$$

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{(-2, 3) \cdot (-2, 3)}$$

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{4 + 9}$$

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{13}$$

$$\vec{b} = (-4, -1)$$

$$\|\vec{b}\| = \sqrt{(-4, -1) \cdot (-4, -1)}$$

$$\|\vec{b}\| = \sqrt{16 + 1}$$

$$\|\vec{b}\| = \sqrt{17}$$

$\overrightarrow{AB}$, Con origen en $A(-2, 3)$ y extremo en $B(-4, -1)$

$$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(-4 - (-2))^2 + (-1 - 3)^2}$$

$$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{4 + 16}$$

$$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{20}$$

Aplicando la ley del coseno sobre el triángulo de la figura 3.34 tenemos:

$$\|\overrightarrow{AB}\|^2 = \|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2 - 2 \cdot \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \cos\theta$$

$$(\sqrt{20})^2 = (\sqrt{13})^2 + (\sqrt{17})^2 - 2 \cdot \sqrt{13} \cdot \sqrt{17} \cdot \cos\theta$$

$$20 = 13 + 17 - 2 \cdot \sqrt{221} \cdot \cos\theta$$

$$20 = 30 - 2 \cdot \sqrt{221} \cdot \cos\theta$$

$$2 \cdot \sqrt{221} \cdot \cos\theta = 10$$

$$\cos\theta = \frac{10}{2 \cdot \sqrt{221}}$$

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{5}{\sqrt{221}}\right)$$

$$\theta = 70,35$$

Conociendo el ángulo que forman los dos vectores procedemos a calcular el producto escalar entre $\vec{a}$ y $\vec{b}$.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \cos\theta$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \sqrt{13} \cdot \sqrt{17} \cdot \cos(70,35)$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 4,999$$

Si utilizamos el valor exacto de θ podremos verificar que el resultado será exactamente 5, valor obtenido en el ejercicio 3.10.

La resolución de este ejercicio muestra que es poco conveniente calcular el producto escalar utilizando el módulo de los vectores porque tendríamos que hallar su ángulo, lo cual hemos visto que es un trabajo tedioso. Entonces, ¿para qué nos sirve esta segunda fórmula? ¿qué utilidad tiene?

La respuesta a estas preguntas es, para calcular precisamente el ángulo θ que forman dos vectores.

Sean $\vec{a}$ y $\vec{b}$ dos vectores en $\mathbb{R}^2$ diferentes de cero y θ el ángulo más pequeño que se forma entre ellos, entonces:

$$\cos\theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\|}$$

O bien,

$$\theta = \cos^{-1} \left(\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\|} \right)$$

donde $0 \leq \theta \leq 180$

Si $\vec{a} = k \cdot \vec{b}$ y $k > 0$, es decir, son múltiplos escalares (paralelos) y con la misma dirección, entonces $\theta = 0^\circ$. *Verifíquelo con un ejemplo.*

Si $\vec{a} = k \cdot \vec{b}$ y $k < 0$, es decir, son múltiplos escalares (paralelos) y con dirección opuesta, entonces $\theta = 180^\circ$. *Verifíquelo con un ejemplo.*

Si $\vec{a} \cdot \vec{b} > 0$ el ángulo que forman los vectores es agudo (menor a 90°). *Verifíquelo con un ejemplo.*

Si $\vec{a} \cdot \vec{b} < 0$ el ángulo que forman los vectores es obtuso (entre 90° y 180°). *Verifíquelo con un ejemplo.*

Si $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ el ángulo que forman los vectores es igual a 90° , es decir, los vectores son perpendiculares. *Verifíquelo con un ejemplo.*

EJERCICIO 3.13

Calcule el ángulo que forman los vectores con coordenadas $\vec{a} = (-2, 3)$ y $\vec{b} = (-4, -1)$.

SOLUCIÓN

Sustituymos valores en nuestra ecuación:

$$\begin{aligned} \theta &= \cos^{-1} \left(\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\|} \right) \\ \theta &= \cos^{-1} \left(\frac{(-2, 3) \cdot (-4, -1)}{\sqrt{13} \cdot \sqrt{17}} \right) \\ \theta &= \cos^{-1} \left(\frac{5}{\sqrt{221}} \right) \\ \theta &= 70,35^\circ \end{aligned}$$

Vemos que efectivamente hemos llegado al mismo resultado y con un procedimiento mucho más simple. En adelante, cuando tengamos que calcular el ángulo entre dos vectores lo haremos de esta manera.

PROBLEMA 3.9

El espacio para una feria agroecológica se ha delimitado por los puntos $O(0,0)$, $A(4,14)$, $B(20,2)$ y $C(24,16)$. Determine:

- El ángulo entre los dos vectores $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$
- El área con la que contará la feria agroecológica.
- Se ha colocado un poste en el punto O y otro a la misma altura en el punto C para hacer el sistema de iluminación con un cable dúplex que una los postes. Determine la longitud del cable con un excedente del 20 %.

SOLUCIÓN

- Graficando los puntos O, A, B y C resulta la figura 3.34 donde θ es el ángulo entre los vectores $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$, y podemos calcularlo por medio de la ecuación:

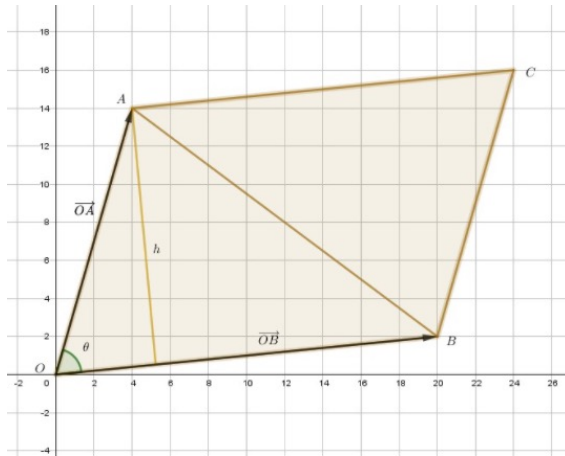
$$\theta = \cos^{-1} \left(\frac{\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}}{\|\overrightarrow{OA}\| \cdot \|\overrightarrow{OB}\|} \right)$$

Al sustituir los valores resulta:

$$\theta = \cos^{-1} \left(\frac{(4,14) \cdot (20,2)}{\sqrt{(4)^2 + (14)^2} \cdot \sqrt{(20)^2 + (2)^2}} \right) = \cos^{-1} \left(\frac{108}{14,56 \cdot 20,10} \right) = 68,34^\circ$$

Figura 3.35

Representación gráfica de los vectores O, A, B y C



- b. El área con la que contará la feria agroecológica está representada de acuerdo con la figura 3.35 por un paralelogramo, esta figura geométrica la dividiremos en dos triángulos con la diagonal que va desde A hasta B . Lo que haremos será calcular el área del triángulo $\triangle AOB$ y luego lo multiplicaremos por dos para encontrar el área para la feria.

Para calcular el área del triángulo $\triangle AOB$ es necesario determinar su altura h utilizando razones trigonométricas:

$$\text{sen}(\theta) = \frac{h}{\|\vec{OA}\|}$$

Donde h es la altura del triángulo $\triangle AOB$. Luego,

$$h = \|\vec{OA}\| \cdot \text{sen}(\theta)$$

Sustituyen valores:

$$h = \sqrt{(4)^2 + (14)^2} \cdot \text{sen}(68,34^\circ) = 13,53$$

Es decir, la altura h es de 13,53 m.

Con la altura h y la base del triángulo $\triangle AOB$ que se corresponde con $\|\overrightarrow{OB}\|$ podemos calcular su área con la ecuación:

$$A = \frac{\|\overrightarrow{OB}\| \cdot h}{2}$$

Luego,

$$A = \frac{\sqrt{(20)^2 + (2)^2} \cdot 13.53}{2} = 135,97 \text{ m}^2$$

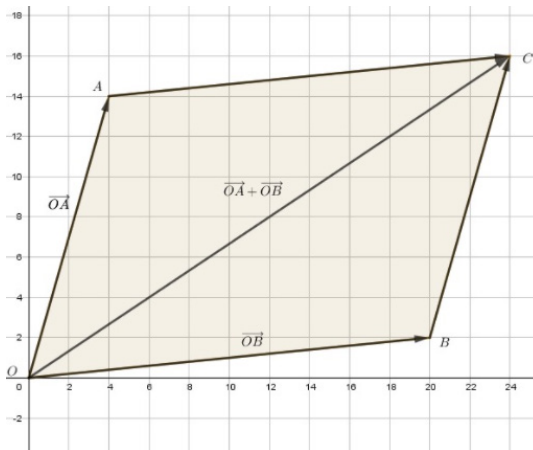
Finalmente, el área con la que contará la feria agroecológica será de:

$$A = 2 \cdot 135,97 = 271,94 \text{ m}^2$$

- c. Para responder a este literal de acuerdo con la figura 3.36 la longitud del cable está representada por el módulo del vector $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$.

Figura 3.36

Representación gráfica de la longitud del cable vector $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$



Por la regla del paralelogramo:

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = (4,14) + (20,2) = (24,16)$$

Ahora para calcular el módulo utilizaremos el producto escalar, es decir:

$$\|\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\| = \sqrt{(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) \cdot (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})}$$

Al sustituir valores, el módulo resulta:

$$\|\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\| = \sqrt{24^2 + 16^2} = 28,84$$

Es decir, la longitud mínima del cable es 28,84 m.

La longitud del cable más el excedente será:

$$\text{Longitud del cable} = 28,84 + 0,20 \cdot 28,84 = 34,61 \text{ m}$$

Hacemos la acotación de longitud del cable más excedente, porque difícilmente este atado a los postes quede completamente horizontal, solo por efecto de su propio peso flexa y, por ende, se requiere de más metros de cable, en este caso hemos considerado un 20 % más.

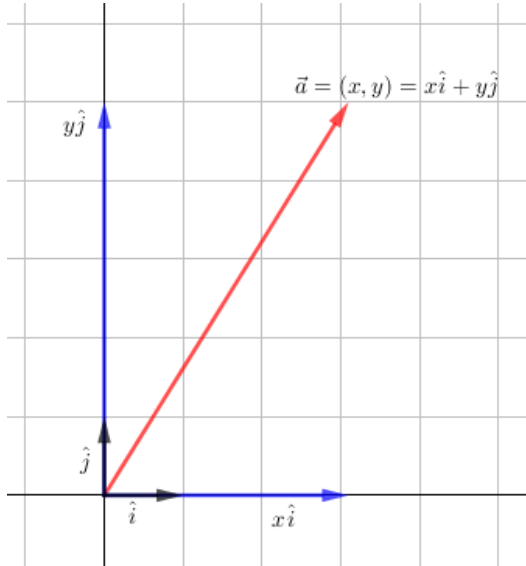
Notación de vectores en término de los vectores unitarios $\hat{i}$ y $\hat{j}$

Hasta ahora, hemos denotado nuestros vectores de la forma $\vec{a} = (x, y)$ y también mencionamos que algunos textos suelen escribirlos como un vector columna de la forma $\vec{a} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Vamos a ver ahora una nueva notación en términos de los vectores unitarios $\hat{i} = (1,0)$ y $\hat{j} = (0,1)$.

Sea el vector con coordenadas $\vec{a} = (x, y)$, lo podemos ubicar de forma genérica sobre el plano cartesiano y descomponerlo en términos de sus coordenadas como se aprecia en la figura 3.37.

Figura 3.37

Representación gráfica descomposición del vector $\vec{a}$ en términos de sus coordenadas



Cada coordenada x y y determina un vector en la dirección de $\hat{i}$ y $\hat{j}$ respectivamente. Si aplicamos la regla de paralelogramo podemos ver que el vector $\vec{a}$ es el resultado de sumar los vectores $x\hat{i}$ y $y\hat{j}$, es decir, $\vec{a} = x\hat{i} + y\hat{j}$. Fácilmente podemos demostrar este resultado:

$$x\hat{i} + y\hat{j} = x(1,0) + y(0,1)$$

$$x\hat{i} + y\hat{j} = (x, 0) + (0, y)$$

$$x\hat{i} + y\hat{j} = (x, y)$$

$$x\hat{i} + y\hat{j} = \vec{a}$$

A partir de lo mencionado arriba, en adelante será común escribir los vectores utilizando esta notación. Veamos algunos ejemplos:

Escribiremos $\vec{a} = 2\hat{i} + 3\hat{j}$ en lugar de $\vec{a} = (2,3)$

Escribiremos $\vec{b} = -2\hat{i} + \hat{j}$ en lugar de $\vec{b} = (-2,1)$

Escribiremos $\vec{c} = -2\hat{j}$ en lugar de $\vec{c} = (0, -2)$. Note que en este vector no aparece el vector unitario $\hat{i}$ por lo cual asumimos que la coordenada en x del vector es nula, lo mismo ocurre cuando no aparece el vector unitario $\hat{j}$. Escribiremos $\vec{d} = -8\hat{i}-3\hat{j}$ en lugar de $\vec{d} = (-8, -3)$

Veamos un ejercicio de operaciones con vectores utilizando esta notación.

EJERCICIO 3.14

Sean los vectores $\vec{a} = 5\hat{i} + 4\hat{j}$, $\vec{b} = \hat{i} + \hat{j}$ y $\vec{c} = -5\hat{j}$. Calcule:

- $2\vec{a}-\vec{b}$
- $\vec{a} \cdot \vec{c}$
- El ángulo θ que forman los vectores $\vec{b}$ y $\vec{c}$

SOLUCIÓN

$$\text{a. } \vec{2a}-\vec{b} = 2 \cdot (5\hat{i} + 4\hat{j}) - (\hat{i} + \hat{j})$$

$$\vec{2a}-\vec{b} = (10\hat{i} + 8\hat{j}) - (\hat{i} + \hat{j})$$

$$\vec{2a}-\vec{b} = 9\hat{i} + 7\hat{j}$$

$$\text{b. } \vec{a} \cdot \vec{c} = (5\hat{i} + 4\hat{j}) \cdot (-5\hat{j})$$

$$\vec{a} \cdot \vec{c} = 5 \cdot 0 + 4 \cdot (-5)$$

$$\vec{a} \cdot \vec{c} = -20$$

- Para calcular el ángulo θ que forman los vectores $\vec{b}$ y $\vec{c}$

$$\theta = \cos^{-1} \left(\frac{\vec{b} \cdot \vec{c}}{\|\vec{b}\| \cdot \|\vec{c}\|} \right)$$

$$\theta = \cos^{-1} \left(\frac{(\hat{i} + \hat{j}) \cdot (-5\hat{j})}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{25}} \right)$$

$$\theta = \cos^{-1} \left(\frac{-5}{5 \cdot \sqrt{2}} \right)$$

$$\theta = 135^\circ$$

Otras aplicaciones de los vectores en $\mathbb{R}^2$

Antes de estudiar otras aplicaciones de los vectores en $\mathbb{R}^2$, veamos otra forma muy usada en problemas físicos de representar los vectores.

Cuando representamos un vector en términos de sus coordenadas x y y decimos que está escrito en *coordenadas rectangulares*. Pero, existe otra forma de representar un vector en términos de su módulo y dirección escribiéndolo en *coordenadas polares*.

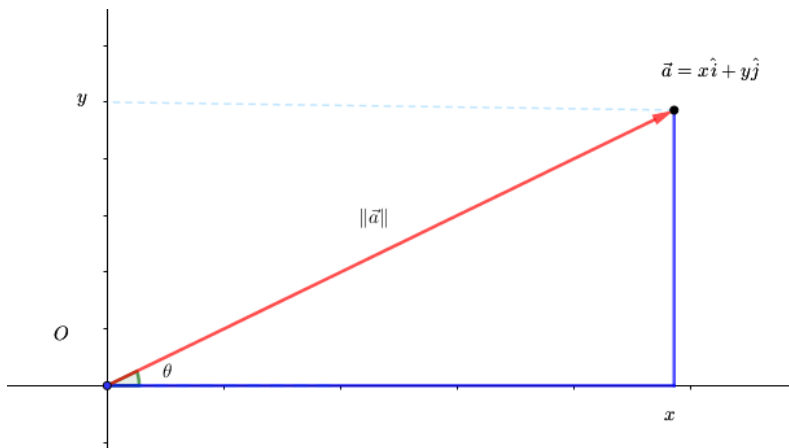
Coordenadas rectangulares	Coordenadas Polares
$\vec{a} = x\hat{i} + y\hat{j}$ o bien $\vec{a} = (x, y)$	$\vec{a} = (\ \vec{a}\ , \theta)$

Es decir, en algunos problemas podrían definirnos una magnitud vectorial con su módulo y dirección (coordenadas polares). Por lo tanto, veamos cómo podemos hallar las coordenadas rectangulares a partir de las polares.

Digamos que tenemos un vector $\vec{a} = x\hat{i} + y\hat{j}$ como se muestra en la figura 3.38.

Figura 3.38

Representación gráfica del vector $\vec{a} = x\hat{i} + y\hat{j}$



Vemos que el vector $\vec{a}$ forma un triángulo rectángulo donde podemos aplicar las razones trigonométricas del seno y del coseno:

$$\cos(\theta) = \frac{x}{\|\vec{a}\|} \text{ y } \operatorname{sen}(\theta) = \frac{y}{\|\vec{a}\|}$$

donde x y y son las coordenadas rectangulares del vector $\vec{a}$, por lo tanto:

$$\begin{cases} x = \|\vec{a}\| \cos(\theta) \\ y = \|\vec{a}\| \operatorname{sen}(\theta) \end{cases}$$

EJERCICIO 3.15

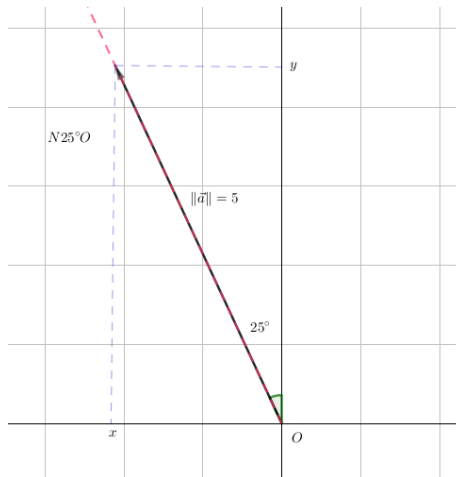
Determine las coordenadas rectangulares del vector $\vec{a}$ que tiene 5 unidades de longitud en la dirección $N25^\circ O$.

SOLUCIÓN

La figura 3.39 nos muestra el cuadrante donde se encuentra el vector $\vec{a}$

Figura 3.39

Representación gráfica del vector $\vec{a}$



Al ubicar la dirección $N25^\circ O$ en el plano cartesiano podemos ver fácilmente que el ángulo θ que forma el vector con la horizontal viene dado por:

$$\theta = 90^\circ + 25^\circ$$

$$\theta = 115^\circ$$

Además, nos dicen que $\|\vec{a}\| = 5$. Por lo tanto,

$$\begin{cases} x = 5 \cdot \cos(115^\circ) \\ y = 5 \cdot \sin(115^\circ) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -2,11 \\ y = 4,53 \end{cases}$$

Por lo tanto,

$$\vec{a} = -2,11\hat{i} + 4,53\hat{j}$$

Dejamos como tarea al lector calcular el módulo y dirección de este vector y verificar que efectivamente coinciden con los proporcionados en el problema.

Vector desplazamiento

El desplazamiento es una magnitud vectorial que representa el cambio de posición de una partícula definido por la magnitud y dirección con la que cambia en un instante específico. Si un cerdo sale de su corral y luego de correr por toda la granja durante 20 minutos regresa a su corral, diremos que no hubo desplazamiento, porque el punto de partida coincide con el de llegada. Si el cerdo, termina en el gallinero, entonces el vector desplazamiento será aquel que tenga como origen el corral y como extremo el gallinero. Note que la trayectoria no siempre es igual al desplazamiento ¿Por qué?

PROBLEMA 3.10

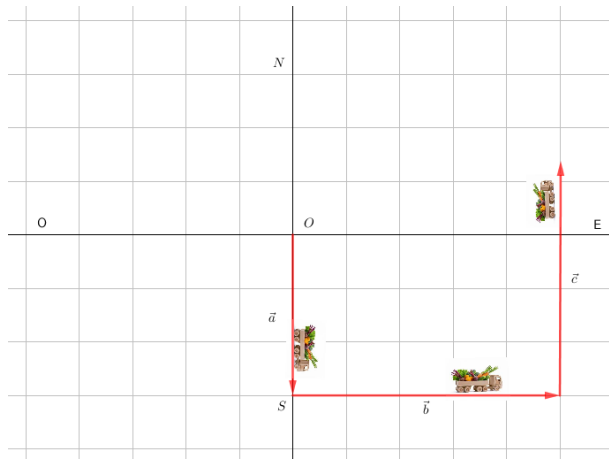
Un camión cargado con hortalizas parte todos los miércoles desde San Luis de Guachalá hasta la feria agroecológica en el parque El Yaznán. Inicialmente hace un recorrido de 3 km al Sur, luego se desvía 5 km al Este y finalmente transita 4.3 km en dirección Norte. Determine la magnitud y dirección del desplazamiento total del camión.

SOLUCIÓN

La figura 3.40 muestra el recorrido del camión sobre el plano cartesiano tomando como origen su punto de partida.

Figura 3.40

Representación gráfica del recorrido del camión



Para hallar las coordenadas del desplazamiento total $\vec{r}$ encontraremos las coordenadas de cada uno de los desplazamientos que realizó el camión y luego los sumaremos.

El vector $\vec{a}$ representará el desplazamiento de 3 km al Sur, es decir, este vector tiene una dirección de 270° y sus coordenadas rectangulares vienen dadas por:

$$\vec{a} = a_x \hat{i} + a_y \hat{j}$$

$$\begin{cases} a_x = 3 \cdot \cos(270^\circ) = 0 \\ a_y = 3 \cdot \sin(270^\circ) = -3 \end{cases}$$

$$\vec{a} = 0\hat{i} - 3\hat{j}$$

$$\vec{a} = -3\hat{j}$$

El vector $\vec{b}$ representará el desplazamiento de 5 km al Este, dirección de 0° , sus coordenadas rectangulares serán:

$$\vec{b} = b_x \hat{i} + b_y \hat{j}$$

$$\begin{cases} b_x = 5 \cdot \cos(0^\circ) = 5 \\ b_y = 3 \cdot \sin(0^\circ) = 0 \end{cases}$$

$$\vec{b} = 5\hat{i} + 0\hat{j}$$

El vector $\vec{c}$ representará el desplazamiento de 4,3 km al Norte, dirección de 90° , y sus coordenadas rectangulares serán:

$$\vec{c} = c_x \hat{i} + c_y \hat{j}$$

$$\begin{cases} c_x = 4,3 \cdot \cos 90^\circ = 0 \\ c_y = 4,3 \cdot \sin 90^\circ = 4,3 \end{cases}$$

$$\vec{c} = 0\hat{i} + 4,3\hat{j}$$

$$\vec{c} = 4,3\hat{j}$$

Procedemos a calcular el desplazamiento total $\vec{r}$ con la suma de vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$:

$$\vec{r} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$$

$$\vec{r} = (0\hat{i} - 3\hat{j}) + (5\hat{i} + 0\hat{j}) + (0\hat{i} + 4,3\hat{j})$$

$$\vec{r} = 5\hat{i} + 1,3\hat{j}$$

Ahora para calcular la magnitud del desplazamiento total calculamos el módulo de $\vec{r}$.

$$\|\vec{r}\| = \sqrt{(r_x)^2 + (r_y)^2}$$

$$\|\vec{r}\| = \sqrt{(5)^2 + (1,3)^2} = 5,16$$

Es decir, la magnitud del desplazamiento total del camión fue de 5,16 km.

La dirección del vector desplazamiento es:

$$\theta = \tan^{-1} \left| \frac{r_y}{r_x} \right|$$

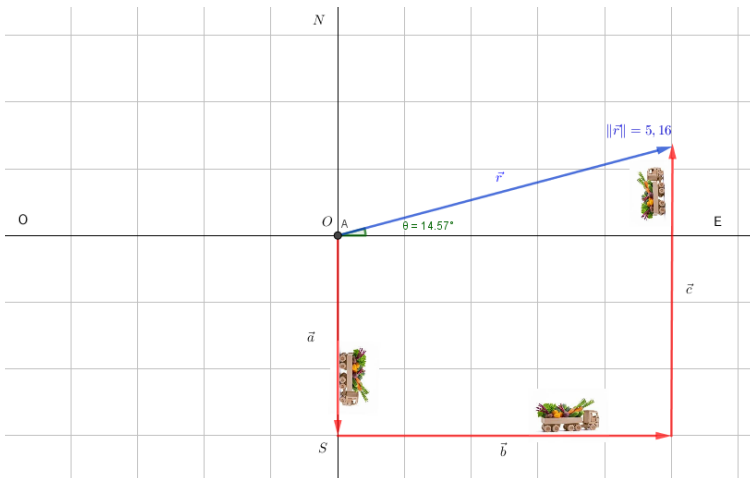
$$\theta = \tan^{-1} \left| \frac{1,3}{5} \right| = 14,57^\circ$$

Como el vector está en el primer cuadrante entonces decimos que la dirección del desplazamiento fue de $14,57^\circ$.

La figura 3.41 muestra la representación gráfica del desplazamiento total del camión:

Figura 3.41

Representación gráfica del vector desplazamiento del camión



PROBLEMA 3.11

Desde la granja El Yagual sale un camión cargado con vacas hacia la granja La Cordillera; el recorrido inicialmente es de 6 km en dirección $E\ 30^\circ\ N$, luego se desvía 6 km al Sur, finalmente transita 6,25 km en dirección al Este. Determine la magnitud y dirección del vector desplazamiento total.

SOLUCIÓN

Para encontrar las coordenadas del vector desplazamiento total debemos sumar los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ que se muestran en la figura 3.42.

Figura 3.42

Representación gráfica de los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$



El vector $\vec{a}$ representa el recorrido de 6 km en dirección $E\ 30^\circ\ N$ con las siguientes coordenadas:

$$\begin{aligned}\vec{a} &= a_x\hat{i} + a_y\hat{j} \\ a_x &= 6 \cdot \cos(30^\circ) = 5,20 \\ a_y &= 6 \cdot \sin(30^\circ) = 3 \\ \vec{a} &= 5,20\hat{i} + 3\hat{j}\end{aligned}$$

El vector $\vec{b}$ representa el recorrido de 6 km al Sur, sus coordenadas serán:

$$\begin{aligned}\vec{b} &= b_x\hat{i} + b_y\hat{j} \\ b_x &= 6 \cdot \cos(270^\circ) = 0 \\ b_y &= 6 \cdot \sin(270^\circ) = -6 \\ \vec{b} &= 0\hat{i} - 6\hat{j}\end{aligned}$$

El vector $\vec{c}$ representa el recorrido de 6,25 km al Este y sus coordenadas serán:

$$\begin{aligned}\vec{c} &= c_x\hat{i} + c_y\hat{j} \\ c_x &= 6,25 \cdot \cos(0^\circ) = 6,25 \\ c_y &= 6,25 \cdot \sin(0^\circ) = 0 \\ \vec{c} &= 6,25\hat{i} + 0\hat{j}\end{aligned}$$

Calculemos el vector desplazamiento total $\vec{r}$ como la suma de vectores $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$:

$$\begin{aligned}\vec{r} &= \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} \\ \vec{r} &= (5,20\hat{i} + 3\hat{j}) + (0\hat{i} - 6\hat{j}) + (6,25\hat{i} + 0\hat{j}) \\ \vec{r} &= 11,45\hat{i} - 3\hat{j}\end{aligned}$$

Hallemos el módulo de vector resultante para determinar la distancia recorrida por el camión:

$$\|\vec{r}\| = \sqrt{(r_x)^2 + (r_y)^2}$$

$$\|\vec{r}\| = \sqrt{(11,45)^2 + (-3)^2} = 11,83$$

Es decir, el desplazamiento del camión desde la granja El Yagual hasta la granja La Cordillera fue de 11,83 km.

Para hallar dirección del vector desplazamiento tomemos en cuenta que está ubicado en el cuarto cuadrante según sus coordenadas. Por lo tanto, la dirección será:

$$\theta = 360^\circ - \alpha$$

donde

$$\alpha = \tan^{-1} \left| \frac{r_y}{r_x} \right|$$

Luego,

$$\alpha = \tan^{-1} \left| \frac{-3}{11,45} \right| = 14,68^\circ$$

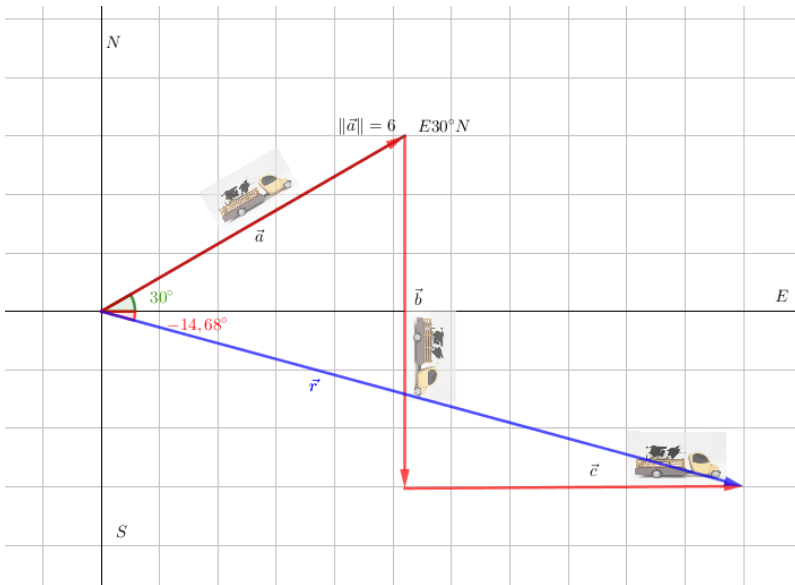
Por lo tanto,

$$\theta = 360^\circ - 14,68^\circ = 345,32^\circ$$

Es decir, la dirección del vector desplazamiento total es de $345,32^\circ$ o bien podemos escribir $-14,68^\circ$ tal como lo muestra la figura 3.43.

Figura 3.43

Representación gráfica de la dirección del vector desplazamiento



Leyes de Newton

Isaac Newton fue un físico, matemático y astrónomo inglés que vivió entre el siglo XVI y XVII (1642-1727) y es muy reconocido principalmente por fundamentar los principios básicos de las leyes de la mecánica clásica publicados en su obra *Principios matemáticos de la filosofía natural* (1687). En esta obra establece tres leyes fundamentales: la ley de inercia (o del equilibrio), la ley de la dinámica y la ley de acción y reacción, también conocidas como primera, segunda y tercera ley de Newton, respectivamente. Recordemos que la fuerza, la aceleración y la velocidad son magnitudes vectoriales, mientras la masa y el tiempo son magnitudes escalares.

Para resolver problemas relacionados con las leyes de Newton vamos a definir algunos términos importantes:

- *Gravedad* ($\vec{g}$): es la aceleración con la que los cuerpos son atraídos al suelo. En la tierra el vector gravedad es $\vec{g} = -9,8 \hat{j} \frac{m}{s^2}$ y su módulo es $9,8 \frac{m}{s^2}$, aproximadamente.
- *Fuerza* ($\vec{F}$): es una magnitud vectorial que mide la intensidad de la cantidad de movimiento de un cuerpo. Existen diferentes tipos de fuerzas.
- *Newton* (N): es una unidad de medida para la fuerza y representa la fuerza que debe aplicarse a un cuerpo de 1 kilogramo de masa para que obtenga una aceleración de 1 metro por segundo cuadrado, es decir, $1 N = 1 kg \cdot \frac{m}{s^2}$.
- *Tensión* ($\vec{T}$): es una fuerza tracción (no comprime, solo jala) ejercida por una cuerda, un hilo, una cadena o un cable.
- *Fuerza de tensión actuante*: es una fuerza de estiramiento que se genera en el elemento producto de las fuerzas externas que actúan en el sistema.
- *Fuerza de tensión máxima actuante*: es la fuerza más desfavorable (la de mayor magnitud) que se genera en los elementos de un sistema productor de las fuerzas externas.
- *Fuerza de tensión admisible*: es la fuerza de tensión máxima que puede soportar un elemento, antes que alcance una situación crítica.
- *Peso* ($\vec{P}$): es la fuerza con la que un planeta atrae a los cuerpos a su centro y depende de la masa y de la gravedad del planeta, es decir, $\vec{P} = m \cdot \vec{g}$.
- *Fuerza normal* ($\vec{N}$): es la fuerza que ejerce una superficie sobre cualquier objeto que repose sobre ella y tiene el mismo módulo, pero con dirección opuesta al peso del objeto, es decir, $\vec{N} = -\vec{P}$.
- *Fuerza de rozamiento (o fricción)* ($\vec{F}_r$): esta fuerza aparece cuando hay contacto entre dos cuerpos, siempre es contraria al movimiento y su módulo es directamente proporcional a la fuerza normal, es decir, $\|\vec{F}_r\| = \mu \cdot \|\vec{N}\|$, donde μ es el coeficiente de rozamiento de la superficie.

- *Diagrama de Cuerpo Libre (DCL)*: es un diagrama que representa las fuerzas (vectores) que actúan sobre un cuerpo libre tomándose algún punto de referencia.

La **primera ley de Newton** establece que todo cuerpo mantiene su velocidad constante (o en reposo) a menos que una fuerza externa actúe sobre ella. Como consecuencia, un cuerpo estará en equilibrio cuando la suma de todas las fuerzas (fuerza neta) que actúan sobre él sea nula, esto se escribe así:

$$\sum \vec{F} = \vec{0}$$

Donde $\sum \vec{F}$ representa la suma vectorial de todas las fuerzas que actúan sobre el cuerpo y sus unidades en el sistema internacional son medidas en Newton.

En términos de sus coordenadas escribimos:

$$\sum F_x \hat{i} + \sum F_y \hat{j} = \vec{0}$$

Por lo tanto,

$$\sum F_x \hat{i} = 0 \hat{i} \quad \sum F_y \hat{j} = 0 \hat{j}$$

o bien sus coordenadas deben ser ceros.

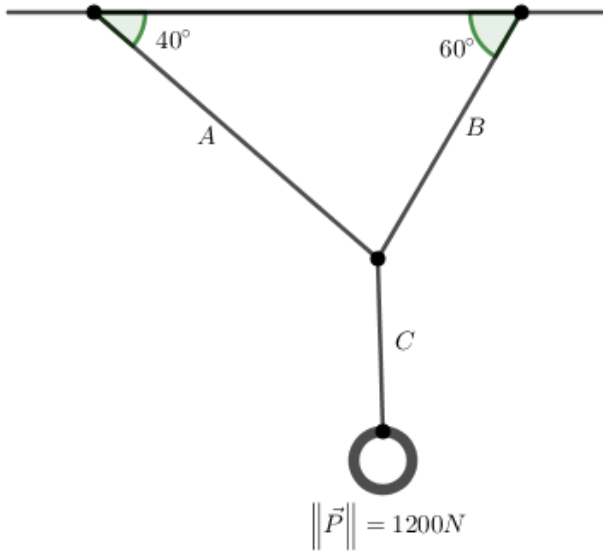
$$\sum F_x = 0 \quad \sum F_y = 0$$

EJERCICIO 3.16

Considere la figura 3.44 donde se representa un sistema en equilibrio formado por tres cuerdas A , B y C sosteniendo un anillo con un peso de módulo 1200 N. Determine el módulo de las tensiones de las tres cuerdas y la forma vectorial de cada tensión.

Figura 3.44

Representación gráfica del sistema conformado por las cuerdas A, B y C



SOLUCIÓN

- a. Como el sistema está en equilibrio, podemos aplicar la primera Ley de Newton que establece que:

$$\sum \vec{F} = \vec{0}$$

y para que esto suceda la sumatoria de las fuerzas en cada eje también deben ser nulas, es decir:

$$\sum F_x \hat{i} = 0 \hat{i} \quad \sum F_y \hat{j} = 0 \hat{j}$$

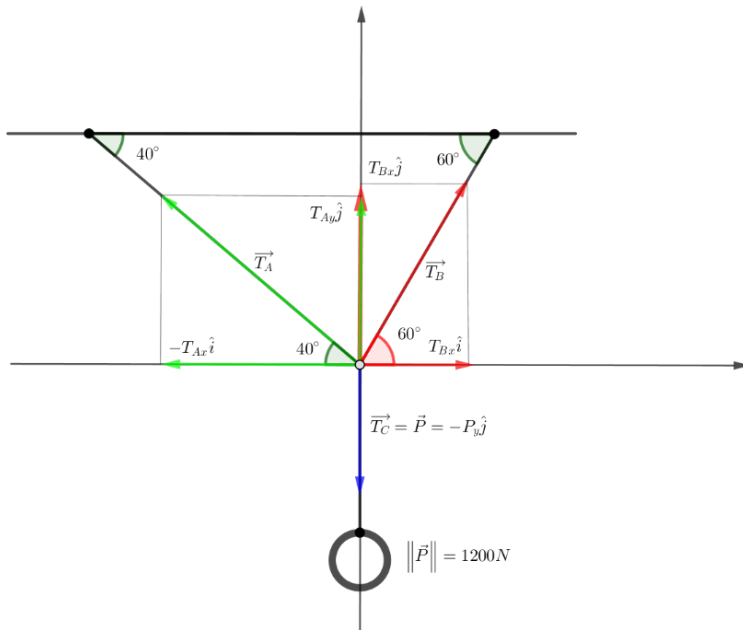
Lo que significa que la sumatoria de las coordenadas de las fuerzas en cada eje debe ser cero.

$$\sum F_x = 0 \quad \sum F_y = 0$$

Para analizar las coordenadas de las fuerzas que están actuando sobre el sistema dibujamos un diagrama de cuerpo libre centrado en el punto que tienen en común las tres cuerdas (figura 3.45) y dibujaremos cada tensión en términos de los vectores unitarios $\hat{i}$ y $\hat{j}$.

Figura 3.45

Representación gráfica del diagrama de cuerpo libre



Donde:

$T_{Bx}\hat{i}$: Componente vectorial del vector tensión en el cable B en dirección al vector unitario $\hat{i}$.

$T_{By}\hat{j}$: Componente vectorial del vector tensión en el cable B en dirección al vector unitario $\hat{j}$.

$T_{Ax}\hat{i}$: Componente vectorial del vector tensión en el cable A en dirección al vector unitario $-\hat{i}$.

$T_{Ay}\hat{j}$: Componente vectorial del vector tensión en el cable A en dirección al vector unitario $\hat{j}$.

$\vec{T}_C = \vec{P} = -P_y\hat{j}$: Es el vector peso en dirección al vector unitario $-\hat{j}$ y es igual a la tensión de la cuerda C.

Analicemos las coordenadas de las fuerzas que actúan en el eje x :

Sabemos que:

$$\sum F_x \hat{i} = 0 \hat{i}$$

Y para esto es necesario que la suma de sus coordenadas sea cero, es decir:

$$\begin{aligned} \sum F_x &= 0 \\ -T_{Ax} + T_{Bx} &= 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$T_{Ax} = T_{Bx}$$

Usando las coordenadas polares de los vectores tenemos que:

$$\begin{aligned} T_{Ax} &= \|\vec{T}_A\| \cdot \cos(40^\circ) \\ T_{Bx} &= \|\vec{T}_B\| \cdot \cos(60^\circ) \end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned} \|\vec{T}_A\| \cdot \cos(40^\circ) &= \|\vec{T}_B\| \cdot \cos(60^\circ) \\ \|\vec{T}_A\| &= \|\vec{T}_B\| \cdot \frac{\cos(60^\circ)}{\cos(40^\circ)} \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\|\vec{T}_A\| = 0,653 \cdot \|\vec{T}_B\| \dots \dots \dots (1)$$

Analicemos ahora las coordenadas de las fuerzas que actúan sobre el eje y .

En primer lugar, centremos nuestra atención en la cuerda C . Como podemos ver en el diagrama de cuerpo libre la tensión de la cuerda C se genera por el peso que cuelga de ella, implicando que sean iguales. Además, vemos que el peso es un vector que va en la dirección del eje y negativo, así que:

$$\vec{T}_C = \vec{P} = -P_y \hat{j}$$

Como el módulo del peso es de 1200 N tenemos que:

$$\vec{P} = -1200 \hat{j}$$

Por lo tanto,

$$\vec{T}_C = -1200 \hat{j}$$

Y su módulo es:

$$\|\vec{T}_C\| = 1200$$

Por otro lado, la primera ley de Newton nos dice que:

$$\sum F_y \hat{j} = 0 \hat{j}$$

$$T_{A_y} \hat{j} + T_{B_y} \hat{j} + \vec{T}_C = 0 \hat{j}$$

Esto implica que la suma de las coordenadas de estos vectores sea cero, es decir:

$$T_{A_y} + T_{B_y} - 1200 = 0$$

En función de las coordenadas polares tenemos:

$$T_{A_y} = \|\vec{T}_A\| \cdot \text{sen}(40^\circ)$$

$$T_{B_y} = \|\vec{T}_B\| \cdot \text{sen}(60^\circ)$$

Sustituyendo tenemos:

$$\begin{aligned}\|\vec{T}_A\| \cdot \text{sen}(40^\circ) + \|\vec{T}_B\| \cdot \text{sen}(60^\circ) - 1200 &= 0 \\ \|\vec{T}_A\| \cdot \text{sen}(40^\circ) + \|\vec{T}_B\| \cdot \text{sen}(60^\circ) &= 1200 \\ \|\vec{T}_A\| &= \frac{1200 - \|\vec{T}_B\| \cdot \text{sen}(60^\circ)}{\text{sen}(40^\circ)} \\ \|\vec{T}_A\| &= 1866,869 - 1,347 \cdot \|\vec{T}_B\| \dots \dots \dots (2)\end{aligned}$$

De la ecuación (1) sabemos que $\|\vec{T}_A\| = 0,653 \cdot \|\vec{T}_B\|$ por lo tanto al igualarla con la ecuación (2) resulta:

$$\begin{aligned}0,653 \cdot \|\vec{T}_B\| &= 1866,869 - 1,347 \cdot \|\vec{T}_B\| \\ 0,653 \cdot \|\vec{T}_B\| + 1,347 \cdot \|\vec{T}_B\| &= 1866,869 \\ 2 \cdot \|\vec{T}_B\| &= 1866,869 \\ \|\vec{T}_B\| &= \frac{1866,869}{2} \\ \|\vec{T}_B\| &= 933,435\end{aligned}$$

Reemplazando este valor en las ecuaciones (1) o (2) podemos encontrar el módulo de la tensión de la cuerda B. Reemplacemos en la ecuación (1):

$$\begin{aligned}\|\vec{T}_A\| &= 0,653 \cdot 933,435 \\ \|\vec{T}_A\| &= 609,533\end{aligned}$$

Así podemos dar respuesta a nuestro problema:

El módulo de la tensión de la *cuerda A* es de 609,533 N formando un ángulo con la horizontal de $180^\circ - 40^\circ = 140^\circ$, luego sus coordenadas rectangulares son:

$$T_{Ax} = 609,533 \cdot \cos(140^\circ)$$

$$T_{Ax} = -466,929$$

$$T_{Ay} = 609,533 \cdot \text{sen}(140^\circ)$$

$$T_{Ay} = 391,800$$

Es decir,

$$\vec{T}_A = -466,929\hat{i} + 391,800\hat{j}$$

El módulo de la tensión de la *cuerda B* es de 933,435 *N* formando un ángulo con la horizontal de 60° , luego sus coordenadas rectangulares son:

$$T_{Bx} = 933,435 \cdot \cos(60)$$

$$T_{Bx} = 466,718$$

$$T_{By} = 933,435 \cdot \text{sen}(60^\circ)$$

$$T_{By} = 808,378$$

Es decir,

$$\vec{T}_B = 466,718\hat{i} + 808,378\hat{j}$$

Finalmente, el módulo de la tensión de la *cuerda C* es de 1200 *N* formando un ángulo con la horizontal de -90° , luego sus coordenadas rectangulares son:

$$T_{Cx} = 1200 \cdot \cos(-90)$$

$$T_{Cx} = 0$$

$$T_{Cy} = 1200 \cdot \text{sen}(-90^\circ)$$

$$T_{Cy} = -1200$$

Es decir,

$$\vec{T}_C = 0\hat{i} - 1200\hat{j}$$

PROBLEMA 3.12

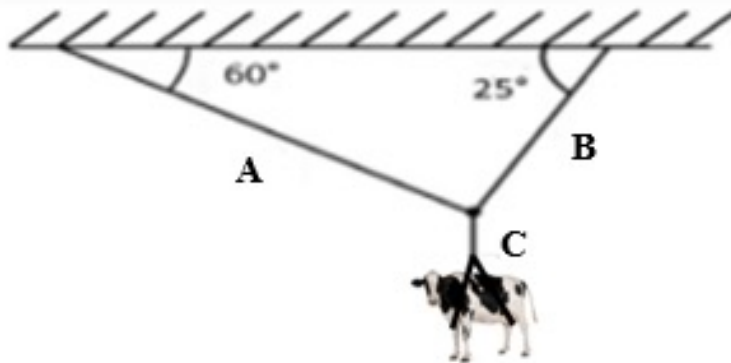
Una vaca de 400 kg cuelga sobre tres cuerdas, la cuerda A que está completamente vertical, la B y C forman un ángulo de 25° y 60° con la horizontal respectivamente. La figura 3.46 ilustra el sistema.

Determine:

- El módulo de las tensiones en las cuerdas A , B y C .
- Si de acuerdo con el fabricante la fuerza de tensión admisible en los cables es de 4000 N, determine si el sistema se mantiene o no en equilibrio.

Figura 3.46

Representación gráfica de la vaca colgando sobre las tres cuerdas

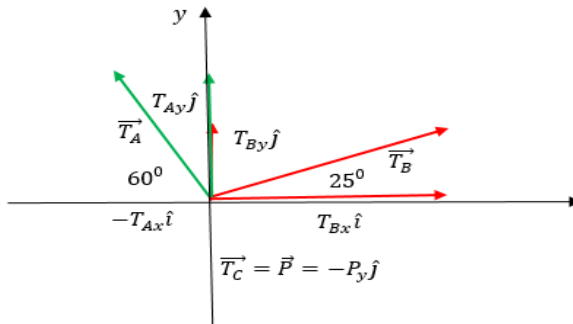


SOLUCIÓN

Procedemos a realizar un diagrama de cuerpo libre (DCL), tal como se muestra en la figura 3.47

Figura 3.47

Representación gráfica del diagrama de cuerpo del sistema



Donde:

$T_{Bx}\hat{i}$: Componente vectorial del vector tensión en el cable B en dirección al vector unitario $\hat{i}$.

$T_{By}\hat{j}$: Componente vectorial del vector tensión en el cable B en dirección al vector unitario $\hat{j}$.

$T_{Ax}\hat{i}$: Componente vectorial del vector tensión en el cable A en dirección al vector unitario $-\hat{i}$.

$T_{Ay}\hat{j}$: Componente vectorial del vector tensión en el cable A en dirección al vector unitario $\hat{j}$.

$\vec{T}_C = \vec{P} = -P_y\hat{j}$: Es el vector peso en dirección en dirección al vector unitario $-\hat{j}$ y es igual a la tensión de la cuerda C .

- a. Para calcular las tensiones en los cables el sistema debe estar en equilibrio, es decir:

$$\sum \vec{F} = \vec{0}$$

Por lo tanto,

$$\sum F_x \hat{i} = 0 \hat{i} \quad \sum F_y \hat{j} = 0 \hat{j}$$

Entonces:

$$\sum F_x = 0 \quad \sum F_y = 0$$

Las fuerzas que actúan en dirección al eje x son:

$$-T_{Ax} + T_{Bx} = 0$$

$$T_{Ax} = T_{Bx}$$

Usando las coordenadas polares de los vectores tenemos que:

$$T_{Ax} = \|\vec{T}_A\| \cdot \cos(60^\circ)$$

$$T_{Bx} = \|\vec{T}_B\| \cdot \cos(25^\circ)$$

Así,

$$\|\vec{T}_A\| \cdot \cos(60^\circ) = \|\vec{T}_B\| \cdot \cos(25^\circ)$$

$$\|\vec{T}_A\| = \|\vec{T}_B\| \cdot \frac{\cos(25^\circ)}{\cos(60^\circ)}$$

Por lo tanto,

$$\|\vec{T}_A\| = 1,81 \cdot \|\vec{T}_B\| \dots \dots \dots (1)$$

Ahora las fuerzas que actúan en dirección al eje y son:

La tensión en la cuerda C , se genera por el peso de la vaca que cuelga, lo que implica que son iguales, pero el peso es un vector que va en la dirección del eje y negativo, así que:

$$\vec{T}_C = \vec{P} = -P_y \hat{j}$$

Como el módulo del peso es el producto de la masa de vaca por la aceleración de gravedad al sustituir valores:

$$\|\vec{P}\| = 400 \text{ kg} \cdot 9,81 \text{ m/s}^2 = 3924 \text{ N}$$

Entonces,

$$\vec{P} = -3924 \hat{j}$$

Por lo tanto,

$$\vec{T}_C = -3924\hat{j}$$

Y su módulo es:

$$\|\vec{T}_C\| = 3924 \text{ N}$$

Aplicando, la primera ley de Newton

$$\sum F_y \hat{j} = 0 \hat{j}$$

Es decir:

$$T_{Ay} \hat{j} + T_{By} \hat{j} + \vec{T}_C = 0 \hat{j}$$

Por lo tanto,

$$T_{Ay} + T_{By} - 3924 = 0$$

En función de las coordenadas polares tenemos:

$$T_{Ay} = \|\vec{T}_A\| \cdot \text{sen}(60^\circ)$$

$$T_{By} = \|\vec{T}_B\| \cdot \text{sen}(25^\circ)$$

Sustituyendo valores:

$$\|\vec{T}_A\| \cdot \text{sen}(60^\circ) + \|\vec{T}_B\| \cdot \text{sen}(25^\circ) - 3924 = 0$$

$$\|\vec{T}_A\| = \frac{3924 - \|\vec{T}_B\| \cdot \text{sen}(25^\circ)}{\text{sen}(60^\circ)}$$

$$\|\vec{T}_A\| = 4531,04 - 0,49 \cdot \|\vec{T}_B\| \dots \dots \dots (2)$$

Igualando las ecuaciones (1) y (2) resulta:

$$1,81 \cdot \|\vec{T}_B\| = 4531,04 - 0,49 \cdot \|\vec{T}_B\|$$

$$2,30 \cdot \|\vec{T}_B\| = 4531,04$$

$$\|\vec{T}_B\| = 1970,01 \text{ N}$$

Reemplazando este valor en las ecuaciones (1) o (2) podemos encontrar el módulo de la tensión de la cuerda B. Reemplacemos en la ecuación (2):

$$\|\vec{T}_A\| = 4531,04 - 0,49 \cdot 1970,01$$

$$\|\vec{T}_A\| = 3565,73 \text{ N}$$

Es decir, el módulo de las tensiones en las cuerdas es:

$$\|\vec{T}_A\| = 3565,73 \text{ N}, \quad \|\vec{T}_B\| = 1970,01 \text{ N} \quad \text{y} \quad \|\vec{T}_C\| = 3924 \text{ N}$$

- b. Para responder a este literal debemos comparar la fuerza de tensión actuante en los cables producto del peso de la vaca y la fuerza de tensión admisible, es decir:

El módulo de la fuerza de tensión máxima actuante producto del peso de la vaca en los cables es de $\|\vec{T}_C\| = 3924 \text{ N}$, como esta fuerza es menor a la fuerza de tensión máxima resistente de los cables, es decir, 4000 N , el sistema se mantiene en equilibrio.

La **segunda ley de Newton** establece que la aceleración de un cuerpo es directamente proporcional a la fuerza neta que actúa sobre él, e inversamente proporcional al valor de su masa. Algebraicamente esta ley se enuncia así:

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

Donde:

$\vec{F}$: Es la fuerza neta que actúa sobre el cuerpo, expresada en el sistema internacional en Newton (N)

$\vec{a}$: Es el vector aceleración, expresada en m/s^2

m : Es la masa de cuerpo, en (kg)

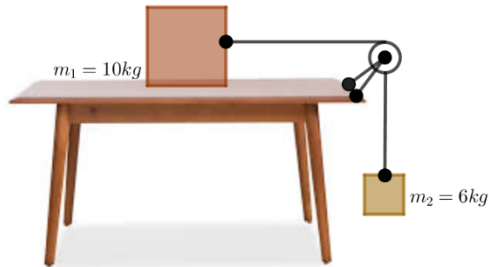
EJERCICIO 3.17

Un cuerpo de 10 kg descansa sobre una mesa. Este cuerpo se une a otro de 6 kg con una cuerda que pasa por una polea sin fricción

tal como se muestra en la figura 3.48. Determine el vector aceleración de los cuerpos y el módulo de la tensión de la cuerda suponiendo que el coeficiente de rozamiento de la mesa es de 0,2.

Figura 3.48

Representación de los cuerpos

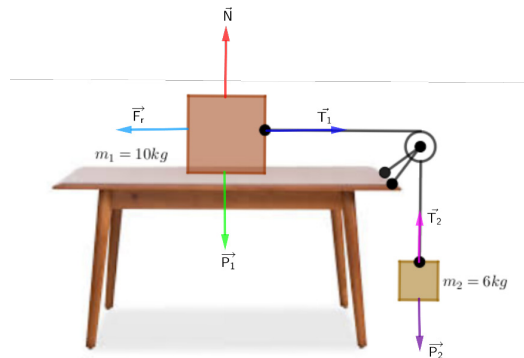


SOLUCIÓN

En primer lugar, realizaremos un diagrama de cuerpo libre sobre cada uno de los cuerpos que tenemos en el sistema para identificar las fuerzas que actúan sobre ellos. El diagrama puede verse en la figura 3.49.

Figura 3.49

Representación del diagrama de cuerpo libre de cada cuerpo



$\vec{N}$: Es la fuerza normal de la mesa sobre el cuerpo uno.

$\vec{F}_r$: Es la fuerza de fricción que ejerce la mesa sobre el cuerpo.

$\vec{T}$: Es la tensión de la cuerda sobre ambos cuerpos.

$\vec{P}_1$: Es el peso del cuerpo uno.

$\vec{P}_2$: Es el peso del cuerpo dos.

En segundo lugar, vamos a calcular el peso de cada uno de los cuerpos, para ello recordemos que:

$$\vec{P} = m \cdot \vec{g} \quad \vec{g} = -9,8 \hat{j}$$

Luego,

$$\vec{P}_1 = m_1 \cdot \vec{g}$$

$$\vec{P}_1 = 10 \cdot (-9,8) \hat{j}$$

$$\vec{P}_1 = -98 \hat{j}$$

Por lo tanto,

$$\|\vec{P}_1\| = 98$$

Del mismo modo,

$$\vec{P}_2 = m_2 \cdot \vec{g}$$

$$\vec{P}_2 = 6 \cdot (-9,8) \hat{j}$$

$$\vec{P}_2 = -58,8 \hat{j}$$

$$\|\vec{P}_2\| = 58,8$$

Ahora calculemos la fuerza de rozamiento que ejerce la mesa sobre el cuerpo uno. Como lo mencionamos antes, sabemos que:

$$\|\vec{F}_r\| = \mu \cdot \|\vec{N}\|$$

donde el vector $\vec{N}$ es la fuerza normal de la mesa que es opuesta e igual en módulo al vector peso, es decir,

$$\vec{N} = -\vec{P}$$

Y μ es el coeficiente de rozamiento de la mesa que en este caso es de 0,2. Por lo tanto tenemos que:

$$\begin{aligned}\vec{N} &= -\vec{P}_1 \\ \vec{N} &= -(-98)\hat{j} \\ \vec{N} &= 98\hat{j} \\ \|\vec{N}\| &= 98\end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned}\|\vec{F}_r\| &= 0,2 \cdot 98 \\ \|\vec{F}_r\| &= 19,6\end{aligned}$$

Como el vector $\vec{F}_r$ es contrario al movimiento del cuerpo, entonces:

$$\vec{F}_r = -19,6\hat{i}$$

Con la información que tenemos al momento, procedemos a aplicar la segunda ley de Newton, que nos dice que la fuerza neta que actúa sobre cada cuerpo será directamente proporcional a la aceleración del sistema.

Cuerpo que está sobre la mesa

Como este cuerpo no se mueve hacia arriba ni hacia abajo, entonces la fuerza neta en el eje y es nula. Por lo tanto, solo consideraremos la fuerza neta que actúa sobre el cuerpo a lo largo del eje x . Luego:

$$\vec{F}_r + \vec{T}_1 = m_1 \cdot \vec{a}_1 \dots \dots \dots (1)$$

Cuerpo que está colgando

En este caso, el cuerpo no se mueve de manera horizontal, por lo que solo tomaremos en cuenta el movimiento vertical, luego:

$$\vec{T}_2 + \vec{P}_2 = m_2 \cdot \vec{a}_2 \dots \dots \dots (2)$$

En la cuerda actúan dos tensiones que por simplicidad se asumen de masa despreciable e inextensibles (no pueden deformarse) implicando que en todos sus puntos su módulo es idéntico, es decir:

$$\|\vec{T}_1\| = \|\vec{T}_2\| = T$$

Luego,

$$\vec{T}_1 = T \hat{i}$$

$$\vec{T}_2 = T \hat{j}$$

Por otro lado, el vector aceleración de cada cuerpo es diferente pero el módulo es el mismo para todo el sistema, es decir:

$$\|\vec{a}_1\| = \|\vec{a}_2\| = a$$

Luego,

$$\vec{a}_1 = a \hat{i}$$

$$\vec{a}_2 = a \hat{j}$$

Reemplazando las coordenadas de los vectores en las ecuaciones (1) y (2) resulta:

$$-19,6\hat{i} + T \hat{i} = 10 \cdot a \hat{i}$$

$$T \hat{j} - 58,8 \hat{j} = 6 \cdot a \hat{j}$$

Sumando las coordenadas en cada ecuación:

$$(-19,6 + T) \hat{i} = 10 \cdot a \hat{i}$$

$$(T - 58,8) \hat{j} = 6 \cdot a \hat{j}$$

Iguando las coordenadas en cada ecuación resulta:

$$-19,6 + T = 10 \cdot a \dots \dots \dots (3)$$

$$T - 58,8 = 6 \cdot a \dots \dots \dots (4)$$

Si restamos estas dos ecuaciones:

$$39,2 = 16 \cdot a$$

$$a = \frac{39,2}{16}$$

$$a = 2,45$$

Con el valor de a podemos encontrar el valor de T reemplazando en cualquiera de las dos ecuaciones (3) y (4). Reemplacemos en (4):

$$T = 6 \cdot 2,45 + 58,8$$

$$T = 73,5$$

Así, ya podemos responder a la pregunta del ejercicio:

El vector aceleración del cuerpo 1 es:

$$\vec{a}_1 = 2,45 \hat{i} \frac{m}{s^2}$$

El vector aceleración del cuerpo 2 es:

$$\vec{a}_2 = 2,45 \hat{j} \frac{m}{s^2}$$

El módulo de la tensión de la cuerda es:

$$\|\vec{T}_1\| = \|\vec{T}_2\| = 73,5 \text{ N}$$

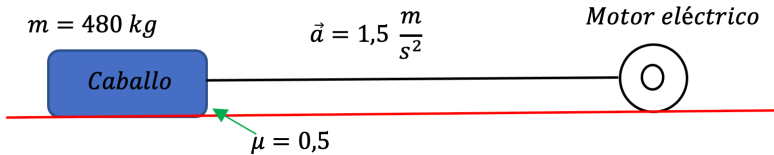
PROBLEMA 3.13

Por medio de un motor y un cable se necesita movilizar sobre un plano horizontal, tal como se muestra en la figura 3.50, un caballo de 480 kg con una aceleración de $1,5 \text{ m/s}^2$. Si la fuerza de tensión admisible en el cable es igual a 1000 Newton y el coeficiente de rozamiento es $\mu = 0,5$, determine el módulo de la fuerza de tensión en el cable, compare el resultado con la fuerza de tensión permisible del

cable e indique si con la ayuda del motor es capaz o no de arrastrar el caballo sobre la superficie.

Figura 3.50

Representación del motor, cable y plano horizontal

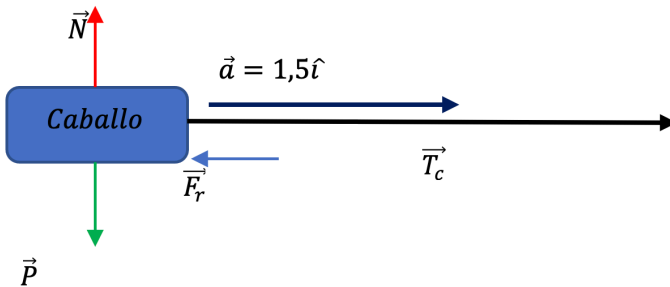


SOLUCIÓN

- a. Para responder a este literal debemos primero realizar un DCL como se muestra en la figura 3.51.

Figura 3.51

Representación del diagrama de cuerpo libre del sistema



Donde:

$\vec{F}_r$: Es la fuerza de fricción entre el caballo y la superficie

$\vec{P}$: Es el peso del caballo.

$\vec{N}$: Es la fuerza normal de la superficie sobre el caballo.

$\vec{a}\hat{i}$: Es el vector aceleración del sistema en dirección al vector unitario $\hat{i}$.

$\vec{T}_c$: Es la tensión del cable.

Primeramente, calcularemos el peso del caballo, es decir:

$$\vec{P} = m \cdot \vec{g} \quad \vec{g} = -9,8 \hat{j}$$

Sustituyendo valores

$$\vec{P} = 480 \cdot (-9,8) \hat{j}$$

$$\vec{P} = -4704 \hat{j}$$

Y su módulo,

$$\|\vec{P}\| = 4704 \text{ N}$$

Ahora, la fuerza de fricción ente los cuerpos es:

$$\|\vec{F}_r\| = \mu \cdot \|\vec{N}\|$$

$\vec{N}$, es la fuerza normal que ejerce la superficie sobre el caballo y esta es opuesta e igual en módulo al vector peso, es decir:

$$\vec{N} = -\vec{P}$$

Sustituyendo valores

$$\vec{N} = -(-4704) \hat{j}$$

$$\vec{N} = 4704 \hat{j}$$

$$\|\vec{N}\| = 4704$$

Ahora, la fuerza de fricción es:

$$\|\vec{F}_r\| = 0,5 \cdot \|4704\|$$

$$\|\vec{F}_r\| = 2352 \text{ N}$$

Como $\vec{F}_r$, es contrario al movimiento, entonces:

$$\vec{F}_r = -2352 \hat{i}$$

Ahora, aplicando la segunda ley de Newton, es decir:

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

Como el caballo no tiene movimiento hacia arriba ni hacia abajo, entonces la fuerza neta en dirección al eje y se anula. Por lo tanto, solo consideraremos la fuerza neta que actúa sobre el cuerpo a lo largo del eje x . Luego:

$$\text{De esta ecuación } \vec{a} = 1,5\hat{i}$$

Sustituyendo valores

$$\begin{aligned} -2352\hat{i} + \vec{T}_c\hat{i} &= (480 \cdot 1,5)\hat{i} \\ \vec{T}_c\hat{i} &= (2352 + 720)\hat{i} \\ \vec{T}_c\hat{i} &= 3072\hat{i} \\ \|\vec{T}_c\| &= 3072 \text{ N} \end{aligned}$$

Es decir, el módulo de la fuerza de tensión en el cable es 3072 N

- b. Para responder a este literal debemos comparar la fuerza de tensión actuante en el cable 3074,4 (N), con la fuerza de tensión admisible en el cable 1000 (N), como en este caso la fuerza de tensión actuante es mayor que la fuerza de tensión admisible, el cable con la ayuda del motor no es capaz de arrastrar al caballo.

Finalmente, la **tercera ley de Newton** establece que, cuando dos cuerpos interactúan entre sí, el módulo de la fuerza que ejerce el primero sobre el segundo es igual al que ejerce el segundo sobre el primero, pero sus direcciones son opuestas. Esto se escribe así:

$$\vec{F}_{AB} = -\vec{F}_{BA}$$

Donde:

$\vec{F}_{AB}$: Es la fuerza que ejerce el cuerpo A sobre el B

$\vec{F}_{BA}$: Es la fuerza que ejerce el cuerpo B sobre el A

EJERCICIO 3.18

Un auto de 700 kg golpea a un tractor con una fuerza de 850 N (figura 3.52). Si la masa del tractor es de 1800 kg, calcular: a) el vector fuerza que experimenta el tractor de parte del auto y su módulo. b) el módulo de la aceleración que sufren ambos vehículos.

SOLUCIÓN

Para resolver este problema ignoraremos la fuerza de fricción que ejerce el suelo sobre los vehículos. Con esta consideración realicemos un diagrama que ilustre la situación:

Figura 3.52

Representación del sistema auto tractor

$$m_2 = 1800 \text{ kg.}$$

$$\|\vec{F}_2\| = ?$$

$$\vec{F}_2 = ?$$

$$\vec{a}_1 = ?$$



$$m_1 = 700 \text{ kg.}$$

$$\|\vec{F}_1\| = 850 \text{ N}$$

$$\vec{a}_2 = ?$$

- a. Para responder a esta pregunta debemos notar que la fuerza que ejerció el auto sobre el tractor está en la dirección del vector unitario $-\hat{i}$ y su módulo es de 850 N, es decir, $\vec{F}_1 = -850 \hat{i}$. Por lo tanto, al aplicar la tercera ley de Newton vemos que:

$$\vec{F}_2 = 850 \hat{i}$$

y su módulo es igual al módulo de $\vec{F}_1$, es decir, $\|\vec{F}_1\| = 850 \text{ N}$

- b. Para conocer la aceleración que experimenta cada vehículo aplicamos la segunda ley de Newton, que nos indica que $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$, es decir: $\vec{a} = \frac{1}{m} \cdot \vec{F}$, en consecuencia:

$$\|\vec{a}\| = \frac{\|\vec{F}\|}{m}$$

Esto nos indica que para conocer el módulo de la aceleración de cada vehículo solo debemos dividir el módulo de la fuerza ejercida por cada uno entre su masa, luego:

$$\|\vec{a}_1\| = \frac{\|\vec{F}_1\|}{m_1}$$

$$\|\vec{a}_1\| = \frac{850}{700}$$

$$\|\vec{a}_1\| = 1,214$$

Del mismo modo,

$$\|\vec{a}_2\| = \frac{\|\vec{F}_2\|}{m_2}$$

$$\|\vec{a}_2\| = \frac{850}{1800}$$

$$\|\vec{a}_2\| = 0,472$$

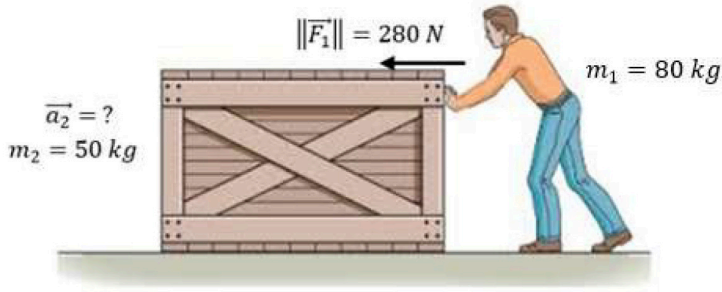
Así, el auto experimenta una aceleración de $1,214 \frac{m}{s^2}$ y el tractor de $0,472 \frac{m}{s^2}$

PROBLEMA 3.14

Un trabajador agrícola de 80 kg moviliza diariamente desde la parcela al área de bodega una caja que en su interior contiene 50 kg de hortalizas con una fuerza de 280 N (figura 3.53) determine: a) el módulo de la fuerza que experimenta la caja de parte del trabajador agrícola, b) la aceleración que experimenta la caja.

Figura 3.53

Representación gráfica del enunciado del problema



SOLUCIÓN

- a. Observe que $\|\vec{F}_2\| = 280 \text{ N}$ que ejerció el trabajador agrícola sobre la caja está en dirección al vector unitario $-\hat{i}$, es decir, $\vec{F}_1 = -280 \hat{i}$, por el principio de acción y reacción (tercera ley de Newton) sabemos que:

$$\vec{F}_2 = 280 \hat{i}$$

y su módulo es $\|\vec{F}_2\| = 280 \text{ N}$

- b. Para hallar la aceleración de la caja aplicamos la segunda ley de Newton, es decir, $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$, en consecuencia, la aceleración será:

$$\|\vec{a}\| = \frac{\|\vec{F}\|}{m}$$

Sustituyendo valores

$$\|\vec{a}_2\| = \frac{280}{50}$$

$$\|\vec{a}_2\| = 5,6$$

Por lo tanto, la aceleración que experimenta la caja es de $5,6 \text{ m/s}^2$

Vectores en $\mathbb{R}^3$

La mayoría de los conceptos que hemos trabajado hasta el momento en $\mathbb{R}^2$ pueden extenderse sin mayor dificultad a $\mathbb{R}^3$. Por ello, iremos ampliando las ideas que traemos de $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^3$ sin mucho detalle. En principio, los conceptos de **vectores libres**, **de posición**, **unitarios** y **vectores equipolentes** se entienden de la misma forma que en $\mathbb{R}^2$ (Gigena *et al.*, 2020).

Los vectores en $\mathbb{R}^3$ pueden representarse de una forma similar a los de $\mathbb{R}^2$, pero agregando una tercera coordenada.

Sea un vector libre $\overrightarrow{AB}$ en $\mathbb{R}^3$ donde $A(x_1, y_1, z_1)$ y $B(x_2, y_2, z_2)$, las **coordenadas** de $\overrightarrow{AB}$ se definen como:

$$C(x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1)$$

Al igual que en $\mathbb{R}^2$, las coordenadas de un vector $\overrightarrow{AB}$ en $\mathbb{R}^3$ representan el extremo del vector de posición equipolente a él, este vector de posición puede representarse como:

$$\vec{c} = (x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1)$$

O bien forma de matriz columna como:

$$\vec{c} = \begin{pmatrix} x_2-x_1 \\ y_2-y_1 \\ z_2-z_1 \end{pmatrix}$$

En $\mathbb{R}^3$ existen tres vectores unitarios que también son muy utilizados para representar un vector en el espacio (Tejada y Guzmán, 2018)

$$\hat{i} = (1,0,0); \hat{j} = (0,1,0) \text{ y } \hat{k} = (0,0,1)$$

De esta manera, cualquier vector en tres dimensiones puede expresarse en términos de los vectores unitarios $\hat{i}, \hat{j}$ y $\hat{k}$. Luego:

Si tenemos un vector de posición $\vec{a} = (x, y, z)$ podemos escribir $\vec{a} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$.

Es importante familiarizarnos con todas las notaciones de vectores

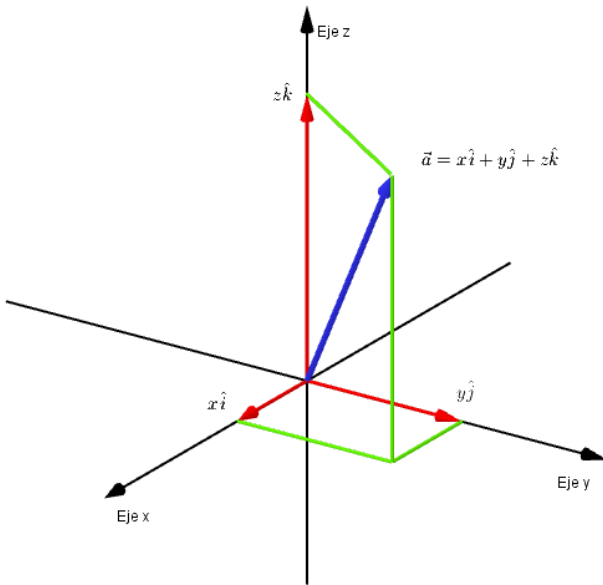
Dado un vector de posición en $\mathbb{R}^3$ es posible calcular su **módulo**:

Sea $\vec{a} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$, entonces $\|\vec{a}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

En la figura 3.54 podemos observar una representación gráfica del vector $\vec{a}$

Figura 3.54

Representación gráfica del vector $\vec{a}$ en $\mathbb{R}^3$



También podemos calcular el módulo de un vector libre en $\mathbb{R}^3$.

Sea un vector libre $\overrightarrow{AB}$ con $A(x_1, y_1, z_1)$ y $B(x_2, y_2, z_2)$, su módulo viene dado por:

$$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

Observe que para calcular el módulo de un vector libre también podemos calcular sus coordenadas y luego hallar el módulo del vector de posición equipolente a él.

EJERCICIO 3.19

Sea el vector libre $\overrightarrow{AB}$ donde $A(4, -1, 3)$ y $B(-2, -1, 4)$, determine:

- El vector de posición $\vec{b}$ equipolente a $\overrightarrow{AB}$.
- El módulo del vector $\vec{b}$
- Grafique el vector libre $\overrightarrow{AB}$ y el vector de posición $\vec{b}$.

SOLUCIÓN

- El vector de posición $\vec{b}$ lo podemos encontrar hallando las coordenadas del vector libre $\overrightarrow{AB}$. Luego,

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} -2 - 4 \\ -1 - (-1) \\ 4 - 3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- El módulo del vector $\vec{b}$ viene dado por:

$$\|\vec{b}\| = \sqrt{(-6)^2 + 0^2 + 1^2}$$

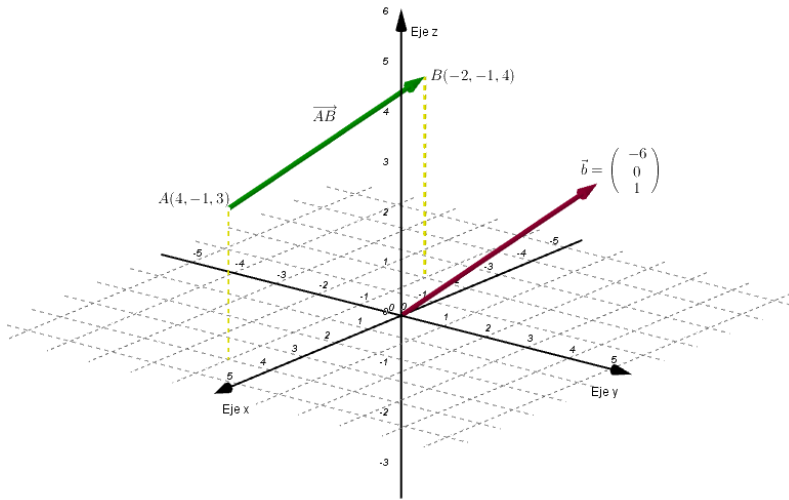
$$\|\vec{b}\| = \sqrt{36 + 0 + 1}$$

$$\|\vec{b}\| = \sqrt{37}$$

- La figura 3.55 muestra la representación gráfica de los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\vec{b}$.

Figura 3.55

Representación gráfica de los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\vec{b}$



PROBLEMA 3.15

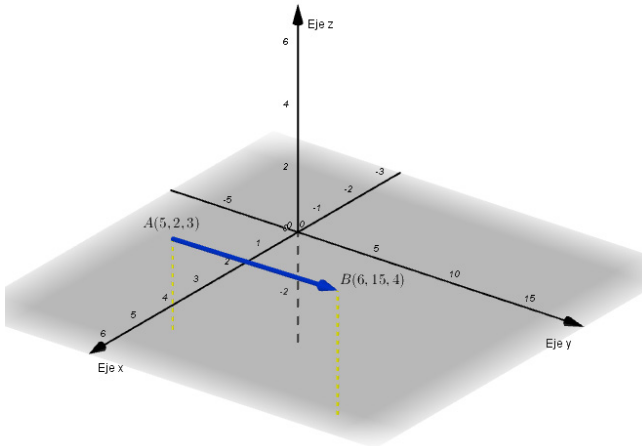
En una finca avícola, se desea instalar el sistema eléctrico, cuyos extremos están ubicados en los puntos $A(5, 2, 3)$ y $B(6, 15, 4)$. Determine la cantidad en metros de cable que se requieren para instalar dicho sistema (considere en todo el problema como unidad de medida el metro)

SOLUCIÓN

La figura 3.56 muestra el trazo de un vector libre que hemos ubicado con origen en A y extremo en B y que representa el sistema de iluminación eléctrica, de esta manera el módulo $\|\overrightarrow{AB}\|$ representará la longitud de cable.

Figura 3.56

Representación gráfica del trazo de un vector libre



Aplicando la fórmula que conocemos para hallar el módulo de un vector libre resulta:

$$\|\vec{AB}\| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

Sustituyendo los valores

$$\begin{aligned}\|\vec{AB}\| &= \sqrt{(6 - 5)^2 + (15 - 2)^2 + (4 - 3)^2} \\ \|\vec{AB}\| &= 13,08\end{aligned}$$

Considerando que, por el efecto de la gravedad, el cable que une los dos extremos del sistema eléctrico no estará completamente recto aumentaremos la longitud del vector $\vec{AB}$ en un 20 %. Luego,

$$13,08 \times 1,2 = 15,70$$

Por lo tanto, la cantidad de metros necesarios será de 15,70 m

Operaciones con vectores en $\mathbb{R}^3$

De manera análoga a $\mathbb{R}^2$ podemos operar con los vectores en $\mathbb{R}^3$. Para ello, es posible extender a $\mathbb{R}^3$ las ideas que traemos del producto de un escalar por un vector, así como las de suma, resta y producto escalar de vectores. Además, veremos que en $\mathbb{R}^3$ se define una nueva operación llamada producto vectorial que resultará muy útil para resolver algunos problemas dentro de la actividad agropecuaria. Estudiemos en detalle cada una de estas operaciones apoyados en las ideas de Castañeda *et al.* (2020):

Producto de un escalar por un vector en $\mathbb{R}^3$

DEFINICIÓN 3.12

Sea un vector en $\mathbb{R}^3$ definido por $\vec{a} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ y un escalar $k \in \mathbb{R}$, se define el producto de un escalar k por el vector $\vec{a}$ como:

$$\begin{aligned}k \cdot \vec{a} &= k \cdot (x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}) \\k \cdot \vec{a} &= k \cdot x\hat{i} + k \cdot y\hat{j} + k \cdot z\hat{k}\end{aligned}$$

Es decir, el escalar multiplica a cada una de las coordenadas del vector. Veamos un ejercicio.

EJERCICIO 3.20

Sea el vector $\vec{a} = -2\hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k}$. Determine:

- $3 \cdot \vec{a}$
- $-\frac{1}{3} \cdot \vec{a}$

SOLUCIÓN

$$\text{a. } 3 \cdot \vec{a} = 3 \cdot (-2\hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k}) = -6\hat{i} + 9\hat{j} + 3\hat{k}$$

$$\text{b. } -\frac{1}{3} \cdot \vec{a} = -\frac{1}{3} \cdot (-2\hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k}) = \frac{2}{3}\hat{i} - \hat{j} - \frac{1}{3}\hat{k}$$

La interpretación gráfica de esta operación es exactamente igual a la que ya estudiamos en detalle para los vectores en $\mathbb{R}^2$ donde el escalar solo modifica el módulo y dirección. Resolvamos el problema 3.16.

PROBLEMA 3.16

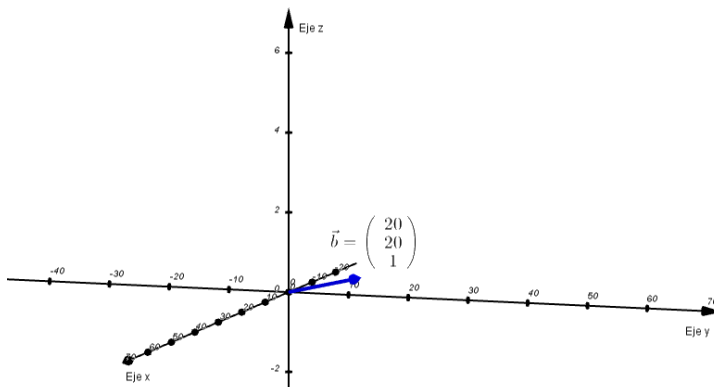
En una hacienda existe una cerca con postes y alambre de púas, cuyos extremos están representados por los puntos $O(0, 0, 0)$ y $B(20, 20, 1)$, con unidades de longitud medidas en metros; si por decisión del propietario se desea remodelar la cerca con bloque de arcilla, pero con el doble de la longitud de la cerca existente, determine, la longitud de la nueva cerca

SOLUCIÓN

La figura 3.57 muestra el trazo del vector que hemos ubicado con origen en O y extremo en B , es decir, el vector $\overrightarrow{OB}$ que en este caso es igual al vector de posición $\vec{b}$ y que representa la cerca existente.

Figura 3.57

Representación gráfica del vector $\overrightarrow{OB}$



Calculemos primero las coordenadas del vector $\overrightarrow{OB}$, es decir:

$$\overrightarrow{OB} = 20\hat{i} + 20\hat{j} + 1\hat{k}$$

Este vector es equipolente al vector de posición $\vec{b}$.

Para hallar la longitud de la nueva cerca debemos multiplicar el vector de posición $\vec{b}$ por dos, es decir:

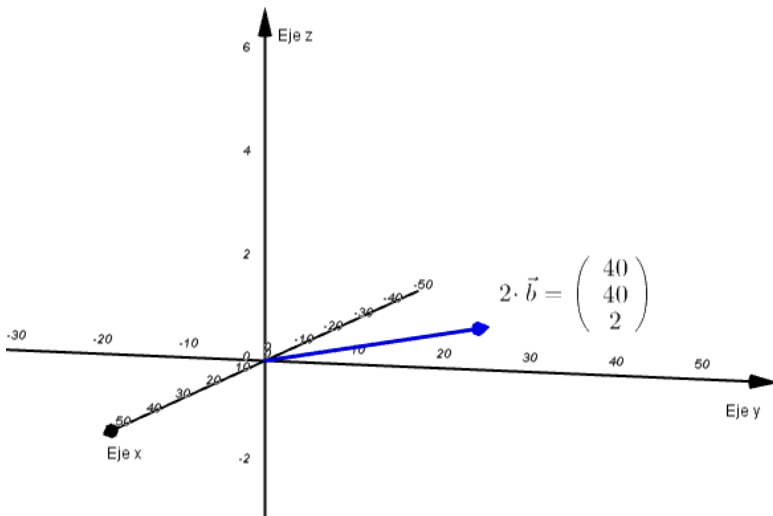
$$2 \cdot \vec{b} = 2 \cdot (20\hat{i} + 20\hat{j} + 1\hat{k})$$

$$2 \cdot \vec{b} = 40\hat{i} + 40\hat{j} + 2\hat{k}$$

La figura 3.58 muestra el trazo del vector de posición $2 \cdot \vec{b}$, que representa la nueva cerca.

Figura 3.58

Representación gráfica del vector de posición $2 \cdot \vec{b}$



Y su módulo representa la longitud de la nueva cerca

$$\|2 \cdot \vec{b}\| = \sqrt{40^2 + 40^2 + 2^2} = 56,60$$

Es decir, la longitud de la nueva cerca es de 56,60 m

Suma y resta de vectores en R^3

Para sumar y restar vectores seguimos el mismo procedimiento que aplicamos en R^2 , tanto analítica como gráficamente.

DEFINICIÓN 3.13

Sean los vectores con coordenadas $\vec{a} = x_1\hat{i} + y_1\hat{j} + z_1\hat{k}$ y $\vec{b} = x_2\hat{i} + y_2\hat{j} + z_2\hat{k}$ se define la suma de $\vec{a}$ y $\vec{b}$ como:

$$\vec{a} + \vec{b} = (x_1 + x_2)\hat{i} + (y_1 + y_2)\hat{j} + (z_1 + z_2)\hat{k}$$

Análogamente, se define la resta de los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ como:

$$\vec{a} - \vec{b} = (x_1 - x_2)\hat{i} + (y_1 - y_2)\hat{j} + (z_1 - z_2)\hat{k}$$

Es decir, para sumar (o restar) dos vectores en R^3 , debemos sumar (o restar) una a una sus coordenadas.

EJERCICIO 3.21

Dados los vectores con coordenadas $\vec{a} = -3\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$ y $\vec{b} = -\hat{i} - 3\hat{j} + \hat{k}$, determine:

- $\vec{a} + \vec{b}$
- $\vec{a} - \vec{b}$

SOLUCIÓN

- Este literal nos pide la suma, que resolvemos en detalle a continuación:

$$\begin{aligned}\vec{a} + \vec{b} &= (-3\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}) + (-\hat{i} - 3\hat{j} + \hat{k}) \\ \vec{a} + \vec{b} &= (-3 - 1)\hat{i} + (2 - 3)\hat{j} + (3 + 1)\hat{k} \\ \vec{a} + \vec{b} &= -4\hat{i} - \hat{j} + 4\hat{k}\end{aligned}$$

b. Ahora calculemos la resta:

$$\begin{aligned}\vec{a} - \vec{b} &= (-3\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}) - (-\hat{i} - 3\hat{j} + \hat{k}) \\ \vec{a} - \vec{b} &= (-3 - (-1))\hat{i} + (2 - (-3))\hat{j} + (3 - 1)\hat{k} \\ \vec{a} - \vec{b} &= -2\hat{i} + 5\hat{j} + 2\hat{k}\end{aligned}$$

En $\mathbb{R}^3$ también se aplican la ley del paralelogramo y del polígono para sumar (o restar) vectores gráficamente. Para estudiar el problema 3.17 veamos dos definiciones importantes:

Anclaje: dispositivo que transmite la fuerza del cable, barra o perno al concreto, pared, mortero u otro.

Resistencia admisible a tensión del anclaje: es la máxima fuerza de tensión que tiene el anclaje para que este no se desprenda del concreto, pared, mortero u otro.

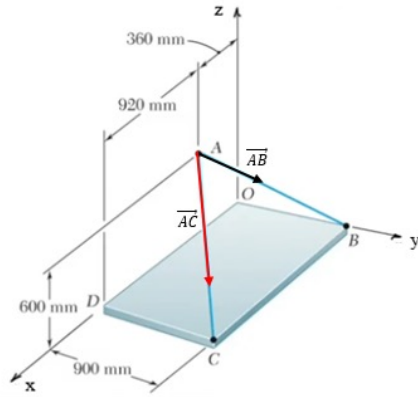
PROBLEMA 3.17

En una hacienda sobre una pared (plano xz figura 3.59) se anclan dos cuerdas, para sujetar una mesa donde se almacenan los bidones de leche, producto del peso de dicha mesa, y de los bidones de leche, el módulo del vector tensión en los cables AB y AC es de 1500 N y 2750 N respectivamente, Si el anclaje tiene resistencia admisible a tensión de 3500 N . Determine:

- La resultante de la fuerza de tensión que actúan en el anclaje A .
- Si el anclaje A sale o no de la pared, producto de la tensión generada por la fuerza resultante sobre éste.

Figura 3.59

Representación gráfica del manifiesto del problema



SOLUCIÓN

- a. De la figura 3.59 podemos identificar los vectores libres $\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{AB}$, el vector resultante que actúa en el anclaje A lo llamaremos:

$$\vec{R} = \overrightarrow{T_{AC}} + \overrightarrow{T_{AB}}$$

Y su módulo será la tensión actuante en el anclaje A, es decir:

$$\|\vec{R}\| = \sqrt{(T_{AC})^2 + (T_{AB})^2}$$

Procedamos a identificar las coordenadas de los puntos A, B y C, según la figura 3.59

$$A(360, 0, 600)$$

$$B(0, 900, 0)$$

$$C(1200, 900, 0)$$

Para hallar el vector resultante debemos primero hallar los vectores libres $\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{AB}$ y expresarlos en forma cartesiana, es decir:

$$\overrightarrow{AC} = (x_2 - x_1)\hat{i} + (y_2 - y_1)\hat{j} + (z_2 - z_1)\hat{k}$$

Sustituyendo valores

$$\overrightarrow{AC} = (1280 - 360)\hat{i} + (900 - 0)\hat{j} + (0 - 600)\hat{k}$$

$$\overrightarrow{AC} = 920\hat{i} + 900\hat{j} - 600\hat{k}$$

De la misma manera $\overrightarrow{AB} = (0 - 360)\hat{i} + (900 - 0)\hat{j} + (0 - 600)\hat{k}$

$$\overrightarrow{AB} = -360\hat{i} + 900\hat{j} - 600\hat{k}$$

Ahora, debemos expresar la fuerza de tensión $\overrightarrow{T_{AC}}$ y $\overrightarrow{T_{AB}}$ en forma vectorial, para esto multiplicamos el módulo del vector tensión de los cables por su respectivo vector unitario, es decir:

$$\overrightarrow{T_{AC}} = 2750 \cdot \frac{\overrightarrow{AC}}{\|\overrightarrow{AC}\|} \quad y \quad \overrightarrow{T_{AB}} = 1500 \cdot \frac{\overrightarrow{AB}}{\|\overrightarrow{AB}\|}$$

Sustituyendo valores

$$\overrightarrow{T_{AC}} = 2750 \cdot \left(\frac{920\hat{i} + 900\hat{j} - 600\hat{k}}{1420} \right) = 1781,69\hat{i} + 1742,96\hat{j} - 1161,97\hat{k}$$

$$\overrightarrow{T_{AB}} = 1500 \cdot \left(\frac{-360\hat{i} + 900\hat{j} - 600\hat{k}}{1140} \right) = -473,68\hat{i} + 1184,21\hat{j} - 789,47\hat{k}$$

Entonces, el vector resultante será:

$$\vec{R} = (1781,69 - 473,68)\hat{i} + (1742,96 + 1184,21)\hat{j} + (-1161,97 - 789,47)\hat{k}$$

$$\vec{R} = 1308,01\hat{i} + 2926,9\hat{j} - 1951,44\hat{k}$$

Por lo tanto, su módulo es:

$$\|\vec{R}\| = \sqrt{(1308,01)^2 + (2926,9)^2 + (-1951,44)^2} = 3753,10 \, N$$

Es decir, la fuerza resultante actuante en el anclaje A es de 3753,10 N

- b. Para responder este literal debemos comparar la fuerza de tensión resultante actuante en el anclaje A con la resistencia admisible a tensión del anclaje, es decir:

La fuerza resultante actuante en el anclaje A , es de $3753,3 \text{ N}$, como esta fuerza de tensión es mayor que la resistencia admisible a tensión del anclaje 3500 N , el anclaje se sale de la pared.

Producto escalar de vectores en $\mathbb{R}^3$

Ahora llevemos a $\mathbb{R}^3$ la idea que traemos de producto escalar (o producto punto) de vectores en $\mathbb{R}^2$.

Veamos las dos definiciones de producto escalar que vimos antes, pero ahora en $\mathbb{R}^3$.

En primer lugar:

Sean los vectores $\vec{a} = x_1\hat{i} + y_1\hat{j} + z_1\hat{k}$ y $\vec{b} = x_2\hat{i} + y_2\hat{j} + z_2\hat{k}$, el producto escalar entre $\vec{a}$ y $\vec{b}$ se define como:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2$$

EJERCICIO 3.22

Dados los vectores con coordenadas $\vec{a} = 2\hat{i} + 3\hat{j} + 5\hat{k}$ y $\vec{b} = -3\hat{i} + 2\hat{j} - 5\hat{k}$, determine $\vec{a} \cdot \vec{b}$.

SOLUCIÓN

Aplicando la definición tenemos:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (2\hat{i} + 3\hat{j} + 5\hat{k}) \cdot (-3\hat{i} + 2\hat{j} - 5\hat{k})$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \cdot (-3) + 3 \cdot 2 + 5 \cdot (-5)$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = -6 + 6 - 25$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = -25$$

En segundo lugar, recordemos que el producto escalar de vectores también es definido en función del módulo de los vectores y del ángulo que se forma entre ellos.

Sean $\vec{a}$ y $\vec{b}$ dos vectores en $\mathbb{R}^3$ diferentes de cero y θ el ángulo que forman entre ellos, entonces:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \cos\theta$$

o bien,

$$\cos\theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\|}$$

donde $0 \leq \theta \leq 180$

EJERCICIO 3.23

Dados los vectores con coordenadas $\vec{a} = 2\hat{i} + 3\hat{j} + 5\hat{k}$ y $\vec{b} = -3\hat{i} + 2\hat{j} - 5\hat{k}$, determine el ángulo que forman los vectores.

SOLUCIÓN

Sustituimos en la fórmula anterior para hallar el ángulo θ que nos piden:

$$\cos\theta = \frac{(2\hat{i} + 3\hat{j} + 5\hat{k}) \cdot (-3\hat{i} + 2\hat{j} - 5\hat{k})}{\sqrt{2^2 + 3^2 + 5^2} \cdot \sqrt{(-3)^2 + 2^2 + (-5)^2}}$$

$$\cos\theta = \frac{-6 + 6 - 25}{\sqrt{4 + 9 + 25} \cdot \sqrt{9 + 4 + 25}}$$

$$\cos\theta = \frac{-25}{\sqrt{38} \cdot \sqrt{38}} = \frac{-25}{38}$$

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{-25}{38}\right) \approx 131,14^\circ$$

Por lo tanto, el ángulo que forman los vectores es de $131,14^\circ$

Al igual que en $\mathbb{R}^2$ se cumple que:

Si $\vec{a} = k \cdot \vec{b}$ y $k > 0$, es decir, son múltiplos escalares (paralelos) y con la misma dirección, entonces $\theta = 0^\circ$.

Si $\vec{a} = k \cdot \vec{b}$ y $k < 0$, es decir, son múltiplos escalares (paralelos) y con dirección opuesta, entonces $\theta = 180^\circ$.

Si $\vec{a} \cdot \vec{b} > 0$ el ángulo que forman los vectores es agudo (menor a 90°)

Si $\vec{a} \cdot \vec{b} < 0$ el ángulo que forman los vectores es obtuso (entre 90° y 180°)

Si $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ el ángulo que forman los vectores es igual a 90° , es decir, los vectores son perpendiculares.

Producto vectorial de vectores

Los vectores en $\mathbb{R}^3$ no solo pueden multiplicarse escalarmente, también podemos hacerlo vectorialmente. A este producto se le conoce como **producto vectorial** o también suele llamarse **producto cruz**. En este caso obtendremos un vector en lugar de un escalar.

DEFINICIÓN 3.14

Sean los vectores $\vec{a} = x_1\hat{i} + y_1\hat{j} + z_1\hat{k}$ y $\vec{b} = x_2\hat{i} + y_2\hat{j} + z_2\hat{k}$, el producto vectorial entre $\vec{a}$ y $\vec{b}$ se define como el siguiente determinante:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

que si resolvemos utilizando el método de los cofactores resulta:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} \hat{i} - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} \hat{j} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \hat{k}$$

Como puedes notar, el producto vectorial resulta un vector. Realicemos un ejercicio:

EJERCICIO 3.24

Sean los vectores $\vec{a} = 2\hat{i} + 5\hat{j} - 3\hat{k}$ y $\vec{b} = 3\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$, halle el producto vectorial entre $\vec{a}$ y $\vec{b}$.

SOLUCIÓN

$$\begin{aligned}\vec{a} \times \vec{b} &= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 5 & -3 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} \\ \vec{a} \times \vec{b} &= \begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \hat{i} - \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \hat{j} + \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \hat{k} \\ \vec{a} \times \vec{b} &= (-5 + 6)\hat{i} - (-2 + 9)\hat{j} + (4 - 15)\hat{k} \\ \vec{a} \times \vec{b} &= \hat{i} - 7\hat{j} - 11\hat{k}\end{aligned}$$

Desde un punto de vista gráfico, el producto vectorial representa un tercer vector que es perpendicular a los dos vectores originales. Con el ejercicio 3.24 podemos verificar fácilmente esta proposición, solo debemos calcular el producto punto entre el vector $\vec{a} \times \vec{b}$ y los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ y corroborar que el resultado es cero, por lo tanto, el ángulo que forman es de 90° , tal como lo mencionamos antes. Veamos:

$$\begin{aligned}(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{a} &= (\hat{i} - 7\hat{j} - 11\hat{k}) \cdot (2\hat{i} + 5\hat{j} - 3\hat{k}) \\ (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{a} &= 2 - 35 + 33 \\ (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{a} &= 0\end{aligned}$$

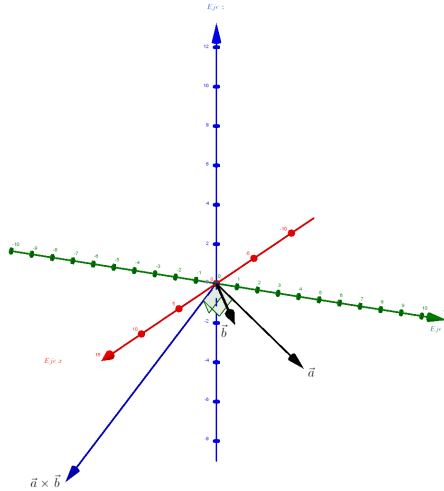
del mismo modo,

$$\begin{aligned}(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{b} &= (\hat{i} - 7\hat{j} - 11\hat{k}) \cdot (3\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}) \\ (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{b} &= 3 - 14 + 11 \\ (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{b} &= 0\end{aligned}$$

Como vemos, efectivamente el vector resultante del producto vectorial entre los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ es perpendicular a ambos vectores. La figura 3.60 ilustra esta situación.

Figura 3.60

Representación gráfica del vector resultante del producto vectorial



Como el lector habrá podido notar, también podemos hallar el producto vectorial entre los vectores $\vec{b}$ y $\vec{a}$ obteniendo el siguiente determinante:

$$\vec{b} \times \vec{a} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & -3 \end{vmatrix}$$

Es decir, solo cambiamos de posición las filas 2 y 3 del determinante. Pero recordemos que, por propiedades de determinantes, al hacer esto el determinante solo cambia de signo, es decir:

$$\vec{b} \times \vec{a} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & -3 \end{vmatrix} = -(\vec{a} \times \vec{b})$$

$$\vec{b} \times \vec{a} = - \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 5 & -3 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\vec{b} \times \vec{a} = -(\hat{i} - 7\hat{j} - 11\hat{k})$$

$$\vec{b} \times \vec{a} = -\hat{i} + 7\hat{j} + 11\hat{k}$$

Lo que hemos visto con esto es que el producto vectorial no es conmutativo, pero sí se cumple la siguiente propiedad:

Sean los vectores $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$, entonces $\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$

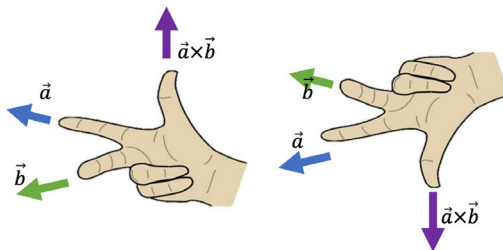
Esto significa los vectores tienen igual magnitud, pero direcciones opuestas.

Regla de la mano derecha para determinar la dirección del producto vectorial

Se trata de una regla nemotécnica que sirve para establecer la dirección que llevará el vector resultante al multiplicar vectorialmente un par de vectores. Solo debes colocar el dedo índice de la mano derecha en la dirección del primer vector $\vec{a}$, luego el dedo medio en la dirección del segundo vector $\vec{b}$. Al hacer esto, la posición resultante del dedo pulgar señalará la dirección del producto vectorial $\vec{a} \times \vec{b}$. La figura 3.61 muestra dos posibles casos de esta situación.

Figura 3.61

Representación gráfica regla de la mano derecha para determinar la dirección del vector resultante del producto vectorial



Módulo del producto vectorial

El módulo del producto vectorial también puede ser determinado en términos del ángulo que forman los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$.

TEOREMA 3.1

Sean los vectores $\vec{a}, \vec{b} \in R^3$, entonces el módulo del producto cruz entre $\vec{a}$ y $\vec{b}$ se define como:

$$\|\vec{a} \times \vec{b}\| = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \text{sen}(\theta)$$

donde θ es el ángulo que forman los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$.

EJERCICIO 3.25

Sean los vectores $\vec{a} = 2\hat{i} + 5\hat{j} - 3\hat{k}$ y $\vec{b} = 3\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$, a) halle el módulo del producto vectorial entre $\vec{a}$ y $\vec{b}$, b) halle el ángulo que forman los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$, c) use la fórmula anterior para verificar con este ejercicio que se cumple la igualdad.

SOLUCIÓN

a. Antes vimos que:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 5 & -3 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \hat{i} - \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \hat{j} + \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \hat{k}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = (-5 + 6)\hat{i} - (-2 + 9)\hat{j} + (4 - 15)\hat{k}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \hat{i} - 7\hat{j} - 11\hat{k}$$

Luego,

$$\|\vec{a} \times \vec{b}\| = \sqrt{1^2 + (-7)^2 + (-11)^2}$$

$$\|\vec{a} \times \vec{b}\| = \sqrt{1 + 49 + 121}$$

$$\|\vec{a} \times \vec{b}\| = \sqrt{171}$$

$$\|\vec{a} \times \vec{b}\| \approx 13,077$$

b. Hallemos ahora el ángulo que forman los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ usando el producto escalar:

$$\cos\theta = \frac{(2\hat{i} + 5\hat{j} - 3\hat{k}) \cdot (3\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k})}{\sqrt{2^2 + 5^2 + (-3)^2} \cdot \sqrt{3^2 + 2^2 + (-1)^2}}$$

$$\cos\theta = \frac{6 + 10 + 3}{\sqrt{4 + 25 + 9} \cdot \sqrt{9 + 4 + 1}}$$

$$\cos\theta = \frac{19}{\sqrt{38} \cdot \sqrt{14}} = \frac{19}{2 \cdot \sqrt{133}}$$

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{19}{2 \cdot \sqrt{133}}\right) \approx 34,538$$

Por lo tanto, el ángulo que forman los vectores es de $34,538^\circ$

c. Finalmente, calculemos el módulo del producto vectorial utilizando la fórmula:

$$\|\vec{a} \times \vec{b}\| = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \sin(\theta)$$

Sabemos que:

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{38} \text{ y } \|\vec{b}\| = \sqrt{14}$$

Luego,

$$\|\vec{a} \times \vec{b}\| = \sqrt{38} \cdot \sqrt{14} \cdot \sin(34,538^\circ)$$

$$\|\vec{a} \times \vec{b}\| \approx 13,077$$

Con este ejercicio vemos que si conocemos las coordenadas de un vector es más conveniente calcular su módulo directamente, pero en ocasiones esta última fórmula también nos será útil.

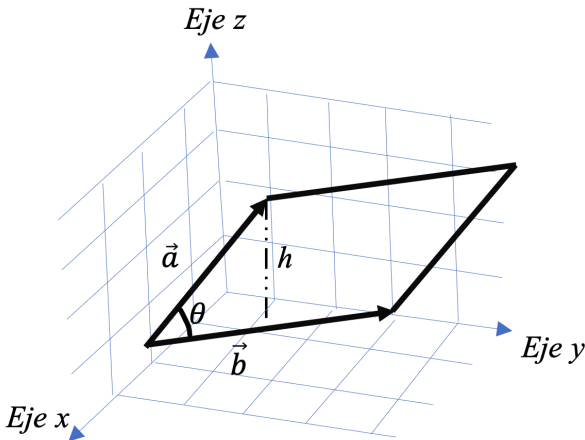
Aplicación geométrica del producto vectorial

Una aplicación geométrica del producto vectorial es el cálculo del área del paralelogramo que puede formarse a partir de dos vectores.

Sean los vectores $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$, siempre es posible construir un paralelogramo tal como se muestra en la figura 3.62.

Figura 3.62

Representación gráfica del paralelogramo que se forma con los vectores $\vec{a}, \vec{b}$



El área de este paralelogramo viene dada por:

$$A = \text{base} \cdot \text{altura}$$

Donde la base del paralelogramo es igual al módulo del vector $\vec{b}$ y la altura la hemos denotado como h . Así,

$$\text{base} = \|\vec{b}\|$$

Aplicando razones trigonométricas tenemos que:

$$\text{sen}(\theta) = \frac{h}{\|\vec{a}\|}$$

Es decir,

$$h = \|\vec{a}\| \cdot \text{sen}(\theta)$$

Reemplazando en la fórmula del área del paralelogramo, resulta:

$$A = \text{base} \cdot \text{altura}$$

$$A = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \text{sen}(\theta)$$

Pero sabemos que el lado derecho de esta igualdad es justamente el módulo del producto vectorial entre los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$. Por lo tanto, afirmamos lo siguiente:

TEOREMA 3.2

El área del paralelogramo que forman los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ viene dado por:

$$A = \|\vec{a} \times \vec{b}\|$$

PROBLEMA 3.18

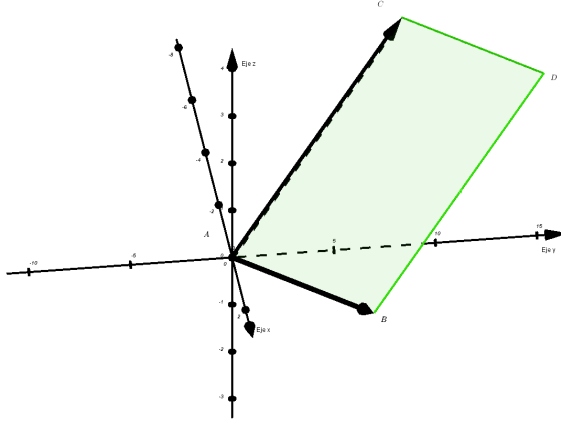
La superficie de una bodega está representada por los puntos $A(0,0,0)$, $B(6,5,2)$, $C(-5,10,2)$ y $D(1,15,4)$, con unidades de longitud medidas en metros, determine el área en m^2 de la superficie de la bodega.

SOLUCIÓN

Como podemos observar en la figura 3.63 el área de la superficie de la bodega está representada por un paralelogramo.

Figura 3.63

Representación gráfica de la superficie de la bodega enmarcada por el paralelogramo



Con la información del problema, los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$, resultan:

$$\overrightarrow{AB} = (6, 5, 2)$$

$$\overrightarrow{AC} = (-5, 10, 2)$$

Calculamos luego el producto $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$

$$\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 6 & 5 & 2 \\ -5 & 10 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 10 & 2 \end{vmatrix} \hat{i} - \begin{vmatrix} 6 & 2 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} \hat{j} + \begin{vmatrix} 6 & 5 \\ -5 & 10 \end{vmatrix} \hat{k}$$

$$= -10\hat{i} - 22\hat{j} + 85\hat{k}$$

Finalmente,

$$A = \|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\| = \sqrt{(-10)^2 + (-22)^2 + (85)^2} = 88,37$$

Es decir, el área en m^2 de la superficie de la bodega es de $88,37 m^2$

Producto mixto de vectores

El producto mixto, también conocido como triple producto escalar, se define para los vectores en el espacio $\mathbb{R}^3$. Este producto se define en términos del producto escalar y del vectorial como sigue:

DEFINICIÓN 3.16

Sean los vectores $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$ el producto mixto entre estos vectores se define como:

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$$

Como vemos, el producto mixto resulta ser un escalar que se obtiene de multiplicar escalarmente el primer vector con el vector que resulta de multiplicar vectorialmente los otros dos vectores.

EJERCICIO 3.26

Sean los vectores $\vec{a} = \hat{i} + 2\hat{j} - 2\hat{k}$; $\vec{b} = -3\hat{i} + 4\hat{j} + 5\hat{k}$ y $\vec{c} = -\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$. Determine el valor del producto mixto $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]$.

SOLUCIÓN

Primero calculamos el producto vectorial $\vec{b} \times \vec{c}$

$$\vec{b} \times \vec{c} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -3 & 4 & 5 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\vec{b} \times \vec{c} = \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \hat{i} - \begin{vmatrix} -3 & 5 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \hat{j} + \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \hat{k}$$

$$\vec{b} \times \vec{c} = (4 - 10)\hat{i} - (-3 + 5)\hat{j} + (-6 + 4)\hat{k}$$

$$\vec{b} \times \vec{c} = -6\hat{i} - 2\hat{j} - 2\hat{k}$$

Ahora, multiplicamos escalarmente este vector con el vector $\vec{a}$, es decir:

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = (\hat{i} + 2\hat{j} - 2\hat{k}) \cdot (-6\hat{i} - 2\hat{j} - 2\hat{k})$$

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = -6 - 4 + 4$$

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = -6$$

$$\text{Luego, } [\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = -6$$

El cálculo del producto mixto puede simplificarse un poco si lo definimos en términos de un determinante de orden de 3.

DEFINICIÓN 3.17

Sean los vectores $\vec{a} = x_1\hat{i} + y_1\hat{j} + z_1\hat{k}$; $\vec{b} = x_2\hat{i} + y_2\hat{j} + z_2\hat{k}$ y $\vec{c} = x_3\hat{i} + y_3\hat{j} + z_3\hat{k}$ entonces:

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

Resolvamos el ejercicio 3.26 utilizando determinantes.

Sean los vectores $\vec{a} = \hat{i} + 2\hat{j} - 2\hat{k}$; $\vec{b} = -3\hat{i} + 4\hat{j} + 5\hat{k}$ y $\vec{c} = -\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$. Determine el valor del producto mixto $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]$.

SOLUCIÓN

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -3 & 4 & 5 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

Si aplicamos la Regla de Sarrus tenemos que:

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -3 & 4 & 5 \\ -1 & 2 & 1 \\ \color{red}{1} & \color{red}{2} & \color{red}{-2} \\ \color{red}{-3} & \color{red}{4} & \color{red}{5} \end{vmatrix}$$

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = (4 + 12 - 10) - (8 + 10 - 6)$$

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = 6 - 12$$

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = -6$$

Como vemos efectivamente obtenemos el mismo resultado que antes encontramos con la primera definición.

Aplicación geométrica del producto mixto

Sea V el volumen del paralelepípedo que forman los vectores:

$$\vec{a} = x_1\hat{i} + y_1\hat{j} + z_1\hat{k}; \vec{b} = x_2\hat{i} + y_2\hat{j} + z_2\hat{k} \text{ y } \vec{c} = x_3\hat{i} + y_3\hat{j} + z_3\hat{k}$$

entonces:

$$V = |[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]|$$

o bien,

$$V = |\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})|$$

Lo que significa este enunciado es que el volumen de un paralelepípedo formado por tres vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ puede hallarse con el valor absoluto del producto mixto entre los tres vectores.

EJERCICIO 3.27

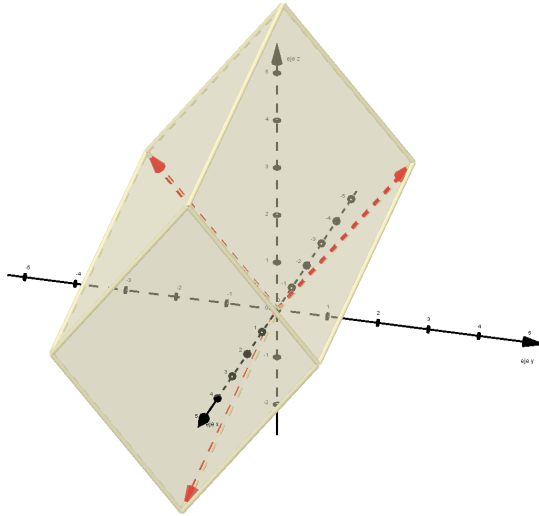
Determine el volumen del paralelepípedo que generan los vectores $\vec{a} = \hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k}$; $\vec{b} = 2\hat{i} - 2\hat{j} + 4\hat{k}$ y $\vec{c} = 3\hat{i} - \hat{j} - 3\hat{k}$. Haga una representación gráfica.

SOLUCIÓN

La figura 3.64 muestra una representación gráfica del volumen del paralelepípedo que deseamos calcular.

Figura 3.64

Representación gráfica del volumen del paralelepípedo



Sabemos que $V = |[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]|$. Por lo tanto, calculamos el producto mixto y su valor absoluto será el volumen deseado.

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & -2 & 4 \\ 3 & -1 & -3 \end{vmatrix}$$

Fácilmente el lector podrá verificar que este determinante es igual 80. Por lo tanto:

$$V = |80|$$

Es decir, el volumen del paralelepípedo es de $80 u^3$.

PROBLEMA 3.19

El container de un camión de transporte pesado está representado por un prisma conformado por los vectores $\vec{a} = 2,35\hat{i} + 0\hat{j} + 0\hat{k}$, $\vec{b} = 0\hat{i} + 3,15\hat{j} + 0\hat{k}$ y $\vec{c} = 0\hat{i} + 0\hat{j} + 2\hat{k}$ con unidades de longitud medidas en metros. Determine:

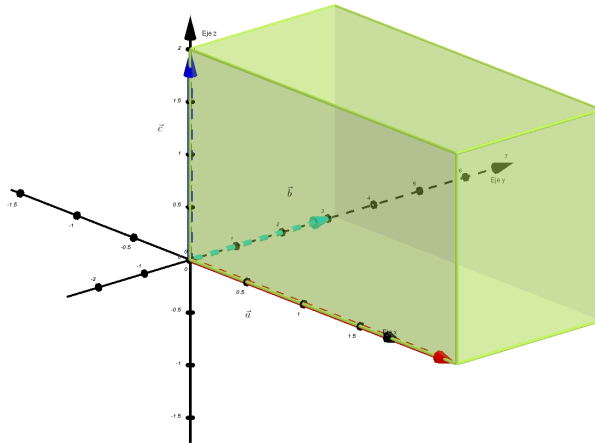
- El volumen del container del camión de transporte pesado representado por el prisma.
- La cantidad de canastas que caben en el container, si las dimensiones de cada canasta son: $1,0 \cdot 0,50 \cdot 0,20 \text{ m}$
- El peso de todas las canastas si cada una de ellas pesa 20 N .

SOLUCIÓN

- La figura 3.65 muestra el gráfico de los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ y el prisma que representa el container del camión de transporte pesado.

Figura 3.65

Representación gráfica de los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ y prisma que simula el container del camión



Sabemos que el volumen del container podemos calcularlo por medio del valor absoluto del producto mixto entre vectores, es decir:

$$V = |[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]|$$

Calculemos el producto mixto y luego usaremos su valor absoluto para determinar el volumen del container.

Sustituyendo valores

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \begin{vmatrix} 2,35 & 0 & 0 \\ 0 & 3,15 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 14,80$$

Ahora el volumen del container será:

$$V = |[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]| = |14,80| = 14,80$$

Es decir, el volumen del container del camión de transporte pesado representado por el prisma es de $14,80 \text{ m}^3$

- b. Para responder a este literal debemos dividir el volumen del container entre el volumen de cada canasta, es decir:

$$C_{canastas} = \frac{V_{container}}{V_{canasta}}$$

Donde:

$C_{canastas}$: Es la cantidad de canastas.

$V_{container}$: Es el volumen del container

$V_{canasta}$: Es el volumen de cada canasta

Ahora el volumen de cada canasta es $V_{canasta} = l \cdot a \cdot h$

Donde:

l : Largo de la canasta.

a : Ancho de la canasta.

h : Altura de la canasta.

$$V_{canasta} = 1,0 \cdot 0,50 \cdot 0,20 = 0,10 \text{ m}^3$$

Sustituyendo valores

$$C_{canastas} = \frac{14,80}{0,10} = 148$$

Por lo tanto, la cantidad de canastas que caben en el container es de 148.

- c. Para calcular el peso de todas las canastas procedemos a multiplicar la cantidad de canastas por el peso de cada una de ellas, es decir:

$$Pt_{canastas} = C_{canastas} \cdot P_{canasta}$$

Donde

$Pt_{canastas}$: Es el peso de todas las canastas.

$P_{canasta}$: Peso de cada canasta.

Sustituyendo valores

$$P_{canastas} = 148 \cdot 20$$

$$P_{canastas} = 2960$$

Es decir, el peso de todas las canastas que caben en el container es de 2960 N

Ejercicios y problemas propuestos

Ejercicios propuestos

1. Sean los puntos $A(3,1)$, $B(-3,5)$, $C(-2,8)$, $D(-1,3)$, $E(1,-1)$ y $F(7,3)$. Determine las coordenadas y la dirección de los siguientes vectores.

a. $\overrightarrow{AB}$

b. $\overrightarrow{BA}$

c. $\overrightarrow{AC}$

d. $\overrightarrow{CB}$

e. $\overrightarrow{DA}$

f. $\overrightarrow{FE}$

g. $\overrightarrow{ED}$

h. $\overrightarrow{DF}$

i. $\overrightarrow{AF}$

j. $\overrightarrow{CE}$

k. $\overrightarrow{DC}$

l. $\overrightarrow{BF}$

2. Determine el módulo y la dirección de los siguientes vectores. En cada caso realice el gráfico correspondiente.

a. $\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

b. $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$

c. $\vec{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$

d. $\vec{u} = 2\hat{i} - 3\hat{j}$

e. $\vec{v} = -2\hat{i} + 3\hat{j}$

f. $\vec{w} = -\hat{i} - \hat{j}$

g. $\vec{d} = (3, 2)$

h. $\vec{e} = (8, -3)$

i. $\vec{f} = (-1, 5)$

j. $\vec{h} = \begin{pmatrix} -7 \\ 1 \end{pmatrix}$

k. $\vec{p} = 3\hat{j}$

l. $\vec{r} = (3, 1)$

3. Para cada uno de los siguientes vectores de posición, determine el origen y el extremo de otros dos vectores libres que sean equipolentes a estos. Para cada caso realice el gráfico correspondiente.

a. $\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$

b. $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$

c. $\vec{c} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}$

d. $\vec{u} = -3\hat{i} + \hat{j}$

e. $\vec{v} = 2\hat{i} + \hat{j}$

f. $\vec{w} = \hat{i} - 3\hat{j}$

4. Realice las siguientes operaciones de vectores utilizando la ley del paralelogramo y compruebe su resultado analíticamente.

a. $\begin{pmatrix} -1 \\ -5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ b. $\begin{pmatrix} 1 \\ -6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ c. $\begin{pmatrix} -1 \\ 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix}$
 d. $(2\hat{i} + 3\hat{j}) - (2\hat{i} - 3\hat{j})$ e. $(-\hat{i} + \hat{j}) - 3\hat{j}$ f. $(\hat{i} - 5\hat{j}) + 8\hat{j}$

5. Realice las siguientes operaciones de vectores utilizando la ley del polígono y compruebe su resultado analíticamente.

a. $\begin{pmatrix} -1 \\ -5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ b. $\begin{pmatrix} 1 \\ -6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ c. $\begin{pmatrix} -1 \\ 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix}$
 d. $(2\hat{i} + 3\hat{j}) - (2\hat{i} - 3\hat{j})$ e. $(-\hat{i} + \hat{j}) - 3\hat{j}$ f. $(\hat{i} - 5\hat{j}) + 8\hat{j}$

6. Resuelva las siguientes operaciones con vectores.

a. $2 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} - 5 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ b. $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + 4 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ c. $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \left(\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -8 \end{pmatrix} \right)$
 d. $(2\hat{i} - 3\hat{j}) - 3 \cdot (-2\hat{i} + 3\hat{j})$ e. $-3 \cdot (-\hat{i} + 3\hat{j}) - \hat{j}$ f. $8 \cdot (\hat{i} - \hat{j}) - 4 \cdot \hat{j}$

7. Calcule el producto escalar (producto punto) entre los siguientes vectores.

a. $\begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ b. $\begin{pmatrix} -5 \\ -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -7 \end{pmatrix}$ c. $\begin{pmatrix} -6 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$
 d. $(\hat{i} - \hat{j}) \cdot (2\hat{i} - 2\hat{j})$ e. $(\hat{i} - \hat{j}) \cdot (9\hat{i} - 5\hat{j})$ f. $(2\hat{i} - \hat{j}) \cdot \hat{j}$

8. Determine el ángulo que forman los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$

a. $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ y $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix}$ b. $\vec{u} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$ y $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \end{pmatrix}$ c. $\vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ y $\vec{v} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$
 d. $\vec{u} = \hat{i} - \hat{j}$ y $\vec{v} = 4\hat{i} + 4\hat{j}$ e. $\vec{u} = 2\hat{i} - 5\hat{j}$ y $\vec{v} = 4\hat{i} - 10\hat{j}$ f. $\vec{u} = 8\hat{i} - 3\hat{j}$ y $\vec{v} = 7\hat{i} - 2\hat{j}$

9. Sean los puntos $A(3, -1, 2), B(2, -3, -5), C(3, 2, -8), D(2, -1, -3), E(0, 1, -1)$ y $F(-7, -3, 3)$. Determine las coordenadas y el módulo de los siguientes vectores.

- a. $\overrightarrow{AB}$ b. $\overrightarrow{BA}$ c. $\overrightarrow{AC}$
 d. $\overrightarrow{CB}$ e. $\overrightarrow{DA}$ f. $\overrightarrow{FE}$
 g. $\overrightarrow{ED}$ h. $\overrightarrow{DF}$ i. $\overrightarrow{AF}$

10. Resuelva las siguientes operaciones con vectores.

- a. $2 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} - 5 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -7 \\ 2 \end{pmatrix}$ b. $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + 4 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -9 \\ 3 \end{pmatrix}$
 c. $\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} - \left(\begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -9 \\ -8 \end{pmatrix} \right)$ d. $-3 \cdot (-\hat{i} + 3\hat{j} - 2\hat{k}) - (-\hat{i} + 3\hat{j} - 2\hat{k})$
 e. $6 \cdot (\hat{i} + 7\hat{j} - \hat{k}) + 2 \cdot (-\hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k})$ f. $4 \cdot [(-\hat{i} + 4\hat{j} - \hat{k}) - 2 \cdot (3\hat{j} - 2\hat{k})]$

11. Calcule el producto escalar (producto punto) entre los siguientes vectores.

- a. $\begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -5 \end{pmatrix}$ b. $\begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \\ -7 \end{pmatrix}$
 c. $(\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}) \cdot (\hat{i} - 7\hat{j} + \hat{k})$ d. $(-2\hat{i} - \hat{j} + 3\hat{k}) \cdot (2\hat{i} - 5\hat{j} + 3\hat{k})$
 e. $\begin{pmatrix} -6 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ f. $(2\hat{i} + 5\hat{j} + \hat{k}) \cdot (4\hat{i} - \hat{j} + 7\hat{k})$

12. Determine el ángulo que forman los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$

- a. $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ y $\vec{v} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$ b. $\vec{u} = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}$ y $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ -2 \end{pmatrix}$
 c. $\vec{u} = 2\hat{i} - \hat{j} + 3\hat{k}$ y $\vec{v} = \hat{i} - 4\hat{j} + \hat{k}$ d. $\vec{u} = 2\hat{i} + 5\hat{j} - 3\hat{k}$ y $\vec{v} = -\hat{i} - 9\hat{j} + \hat{k}$
 e. $\vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$ y $\vec{v} = \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ -2 \end{pmatrix}$ f. $\vec{u} = \hat{i} - 8\hat{j} + \hat{k}$ y $\vec{v} = 2\hat{i} - \hat{j} - 4\hat{k}$

13. Dados los vectores:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{p} = 2\hat{i} - \hat{j} - 4\hat{k} \text{ y } \vec{r} = 2\hat{i} - \hat{j} - 4\hat{k}$$

Determine:

- | | | |
|-----------------------------|-----------------------------|-----------------------------|
| a. $\vec{a} \times \vec{b}$ | b. $\vec{b} \times \vec{a}$ | c. $\vec{a} \times \vec{p}$ |
| d. $\vec{p} \times \vec{c}$ | e. $\vec{r} \times \vec{b}$ | f. $\vec{r} \times \vec{p}$ |
| g. $\vec{p} \times \vec{r}$ | h. $\vec{c} \times \vec{b}$ | i. $\vec{a} \times \vec{c}$ |

14. Calcule el volumen del paralelepípedo que forman las siguientes ternas de vectores.

- $\vec{a} = \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ y } \vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$
- $\vec{a} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{p} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ y } \vec{r} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$
- $\vec{q} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{r} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ y } \vec{s} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$
- $\vec{p} = -2\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}, \vec{q} = \hat{i} + \hat{j} - \hat{k} \text{ y } \vec{r} = \hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}$
- $\vec{s} = -\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}, \vec{q} = -2\hat{i} - 6\hat{j} - 10\hat{k} \text{ y } \vec{r} = 12\hat{i} - 11\hat{j} - 9\hat{k}$
- $\vec{r} = 2\hat{i} - 8\hat{j} - 4\hat{k}, \vec{q} = 2\hat{i} - 3\hat{j} - \hat{k} \text{ y } \vec{s} = 2\hat{i} - \hat{j} - \hat{k}$

Problemas propuestos

- El propietario de una hacienda desea separar la superficie de la vaqueriza y del potrero mediante una pared de ladrillos, para lo cual contrata a un maestro de obra. El constructor inicia desde un punto de referencia los trabajos de excavación para el asiento de la viga de atado de apoyo a la pared y llega a un extremo marcando el punto $B(5, -6)$, con unidades de longitud medidas en metros, determine:

- a. La longitud de la excavación para el asiento de una viga de atado.
- b. La dirección de la excavación.
2. Un campesino con la ayuda de un pico y una pala desea realizar una excavación para una viga de atado de 0,25 metros de ancho por 0,30 de profundidad para apoyar una pared de bloques de concreto de 0,20 metros de alto por 0,30 de largo que servirá de lindero entre dos fincas. El campesino parte desde un punto de referencia y llega a un extremo marcando las coordenadas de un punto $B(4,6)$, considerando que las unidades de medida de longitud están en metro. Determine:
 - a. El volumen, en metros cúbicos del material de tierra excavado por el campesino.
 - b. La dirección de la excavación para la viga de atado.
 - c. Cantidad de bloques de concreto que se requieren para construir la pared, considere que la altura de esta será de 1,8 metros.
3. La superficie de una chanchera rectangular es de 300 m^2 . Dicha superficie está representada por los vectores $\vec{a} = (15,0)$ y $\vec{b} = (0,20)$, con unidades de longitud medidas en metros. Producto del crecimiento de los animales el área ya no es suficiente, razón por la cual, el propietario desea remodelarla incrementando la base de la superficie rectangular en un 75 %. Determine:
 - a. Las nuevas coordenadas del vector $\vec{a}$.
 - b. La nueva área de la chanchera.
4. El propietario de una granja desea construir un nuevo galpón de pollos duplicando la base de la superficie rectangular del galpón actual. Si el ancho y largo de la superficie del galpón existente están representadas por los vectores $\vec{a} = (30,0)$ y $\vec{b} = (0,33)$. Determine el área del nuevo galpón. Considere unidades de longitud medidas en metros.
5. La superficie de un terreno está representada por el paralelogramo generado por los vectores $\vec{a} = (100,15)$ y $\vec{b} = (10,150)$, con unidades de longitud medidas en metros. El propietario

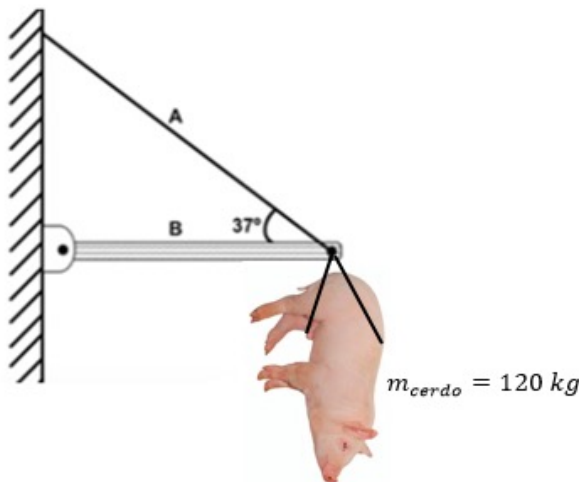
- producto de pérdidas económicas desea vender la mitad de su propiedad y para esto es necesario dividir en dos áreas mediante una diagonal que represente el vector $\vec{a} + \vec{b}$. Si el costo del terrero es de $95 \text{ \$/m}^2$, determine el ingreso que obtuvo el propietario producto de la venta de esa superficie.
6. La superficie de un galpón de cuyes está representada por el cuadrado generado por los vectores $\vec{a} = (8,0)$ y $\vec{b} = (0,8)$, con unidades de longitud medidas en metros. El propietario, para separar los reproductores de los cuyes para carne desea dividir el área en dos superficies triangulares mediante una pared que represente la diagonal, determine la longitud de la pared.
 7. Un productor desea delimitar un potrero cuya forma es igual a un trapecio, con una cerca viva. Para ello, parte de un punto de referencia e instala 10 metros de cerca en dirección al Norte y marca un punto A, luego, instala 5 metros de cerca con dirección al Este, donde marca un punto B, finalmente coloca 14,14 metros de cerca con dirección $S45E$ donde marca el punto C. Determine la longitud de la cerca que cierra el perímetro del potrero que parte desde el origen y llega al punto C.
 8. En una granja se desea construir una bodega para almacenar granos, en cuyo perímetro se utilizará bloques de concreto, para esto un obrero desde un punto de referencia realiza una excavación de 3 metros de longitud en dirección al Sur, marcando un punto A, luego gira y excava 3 metros en dirección al Este y señala un punto B, finalmente gira y excava 5 metros en dirección al Norte, indicando un punto C, determine la longitud de la excavación en metros, que debe realizar el obrero desde el punto de referencia hasta el punto C.
 9. La superficie de una caballeriza está delimitada por los puntos $(0,0)$, $A(1000,0)$, $B(20,1500)$ y $C(1020,1500)$, con unidades de longitud en metros, para separar la superficie de la caballeriza del establo de las vacas el propietario desea dividir en dos el área mediante la instalación de una cerca interna con extremos en los puntos A y B. Determine:

- a. La longitud de la cerca interna.
 - b. El área de la superficie del establo de las vacas.
10. Un patio destinado para una feria agroecológica está delimitado por los puntos $O(0,0)$, $A(10,0)$, $B(3,15)$ y $C(13,15)$, con unidades de longitud medidas en metros. El organizador de la feria decide dividir el patio en dos mediante la instalación de una baranda interna con extremos los puntos A y B, para separar la venta de productos del espacio de comidas, determine, la longitud de la baranda.
11. El potrero de una granja está delimitado por puntos $O(0,0)$, $A(25,0)$, $B(5,15)$ y $C(30,15)$, con unidades de longitud en metros. Determine:
- a. El ángulo entre los vectores $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$
 - b. El área de la superficie del potrero.
 - c. La cantidad de caballos que caben en el potrero, considere que cada mamífero requiere de un área de $5,25 \frac{m^2}{\text{caballo}}$
 - d. El costo de la superficie del potrero si el precio es de $125 \frac{\$}{m^2}$
 - e. El costo de la superficie del potrero y los caballos, considere que cada mamífero cuesta \$450
12. El potrero de una granja está delimitado por puntos $O(0,0)$, $A(25,0)$, $B(5,15)$ y $C(30,15)$, con unidades de longitud en metros. Determine:
- a. El ángulo entre los vectores $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$
 - b. El área del potrero.
 - c. La cantidad de caballos que caben en el potrero, considere que cada mamífero requiere de un área de $5,25 m^2/\text{caballo}$.
 - d. El costo del potrero si el precio es de $125 \$/m^2$.
 - e. El valor del potrero y de todos los caballos, si cada uno cuesta \$450.
13. En una finca, el volumen de un reservorio de agua de riego para el cultivo de flores, se ha delimitado por los puntos $O(0,0)$, $A(5,0)$ y $B(3,6)$. Determine:
- a. El ángulo entre los dos vectores $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$.
 - b. El volumen del reservorio, si su la altura es 1,25 metros.

14. Un caballo corre desde un punto de partida A, con dirección de 60° al Noreste su trayectoria para llegar a un punto B fue de 0,9 km. Después de detenerse, corre hacia un punto C, con dirección de 85° al Oeste del Sur, con recorrido de 1,2 km. Determine la magnitud y dirección del vector desplazamiento total representado por la trayectoria que realizó el caballo.
15. Desde una fábrica de lácteos, sale un camión cargado con queso, inicialmente recorre con dirección $S30^\circ E$ 2 km, seguidamente se traslada en dirección al Oeste con trayectoria de 2,5 km, por último, para llegar al destino final se moviliza 30° al Noroeste con trayectoria de 1,4 km. Determine la magnitud y dirección del vector desplazamiento representado por el recorrido del camión.
16. Un cerdo va al matadero, una vez muerto el animal, el carnicero lo cuelga sobre el suelo, (figura 3.66). Si la fuerza admisible en el cable A es de 3000 Newton. Determine la fuerza actuante en el cable, indique si el cable es capaz o no de mantener el sistema en equilibrio.

Figura 3.66

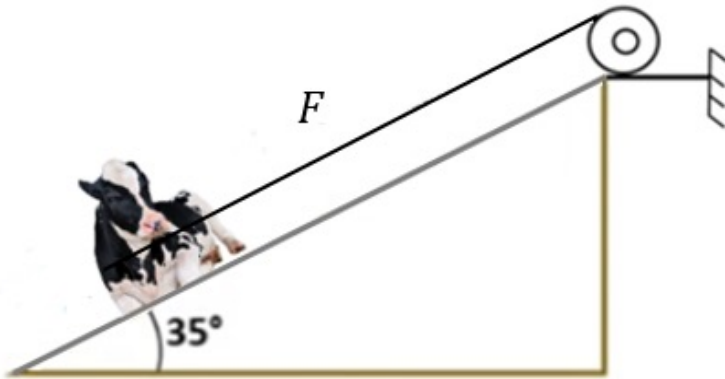
Representación gráfica de lo expuesto en el problema



17. Por medio de un motor y un cable que de acuerdo con las especificaciones del fabricante tiene una fuerza permisible de 4500 Newton se desea que la vaca de 425 kg (figura 3.67) suba con una aceleración de $2,5 \text{ m/s}^2$, despreciando la fricción, determine la magnitud de la fuerza F que actúa sobre el cable, compare el resultado con la fuerza permisible del cable, e indique si este con la ayuda del motor es capaz o no de subir la vaca.

Figura 3.67

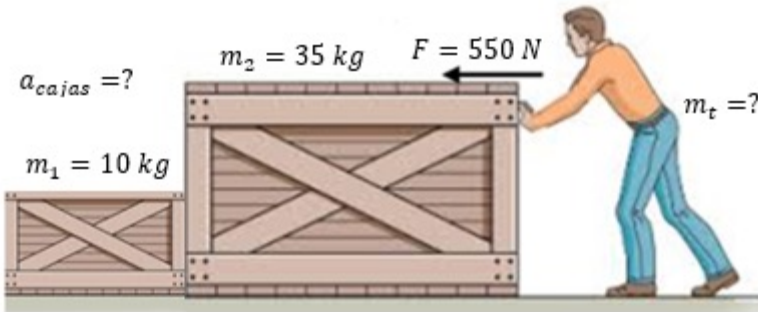
Representación gráfica del sistema motor, cable y vaca



18. Un trabajador agrícola necesita movilizar en el interior de una bodega (figura 3.68) dos cajas que están adosadas y que contienen 10 y 35 kg de bananos. Si la fuerza aplicada por el trabajador es de 550 Newton, determine: a) la fuerza que experimenta la caja de parte del trabajador, b) la aceleración de las cajas, c) la masa del trabajador si su aceleración es de 15 m/s^2

Figura 3.68

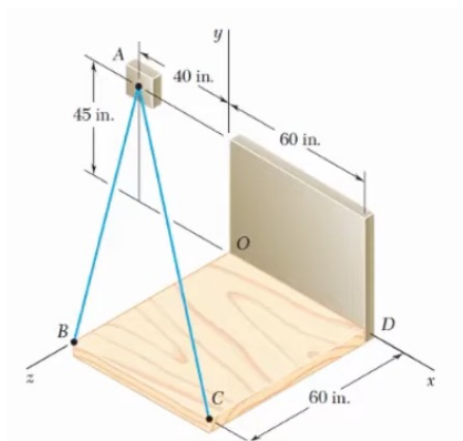
Representación gráfica del sistema descrito en el enunciado del problema



19. En una hacienda el sistema mostrado en la figura 3.69 se utiliza para almacenar sacos de abono. Si la tensión en los cables AB y AC son de 425 y 510 libras respectivamente. Determine:
- La fuerza resultante en el anclaje A.
 - Si el anclaje A tiene una fuerza resistente de 1200 libras, determine si el sistema se mantiene o no estable.

Figura 3.69

Representación del sistema utilizado para almacenar sacos de abono



20. La superficie de un terreno está representada por los puntos $A(0,0,0)$, $B(7,4,1)$, $C(6,12,1)$ y $D(13,16,2)$, con unidades de longitud medidas en metros, determine el área en m^2 del terreno. Utilice para responder al problema el módulo del producto cruz.
21. En una granja el espacio interior de una bodega para almacenamiento de balanceado está representado por un prisma conformado por los vectores, $\vec{a} = 10\hat{i} + 0\hat{j} + 0\hat{k}$, $\vec{b} = 0\hat{i} + 15\hat{j} + 0\hat{k}$ y $\vec{c} = 0\hat{i} + 0\hat{j} + 5\hat{k}$, con unidades de longitud medidas en metros. Determine:
- El volumen del espacio interior de la bodega representado por el prisma.
 - El área interna de la bodega representada por el prisma