https://doi.org/10.17163/abyaups.4.2

Capítulo 2
Sistemas de ecuaciones lineales

En este capítulo estaremos hablando sobre los sistemas de ecuaciones lineales y la gran variedad de aplicaciones que tiene dentro de las actividades agropecuarias. Entre otros aspectos, utilizaremos los sistemas de ecuaciones lineales para determinar: costo por kilogramo de producto alimenticio de consumo, costo de inversión, ingreso por venta de productos agrícolas, cantidad de animales por granja, costo por animal, cantidad de animales comercializado, sacos de balanceados vendidos, tarifa diaria por kilómetro recorrido, dimensiones de recipientes, fundas de leche envasadas, tallos de rosas vendidos, áreas de superficies y volúmenes de recipientes entre otros. Estudiemos algunos conceptos básicos apoyados en Mejía (2019) y Morales (2019a).

Conceptos básicos

Definición 2.1

Una ***ecuación lineal de n incógnitas*** es cualquier ecuación de la forma:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$$

donde,

$a_1, a_2, \dots a_n$ toman valores reales cualesquiera y se conocen como ***coeficientes.***

b toma cualquier valor real y se conoce como ***término independiente.***

$x_1, x_2, \dots x_n$ son las variables de la ecuación que pueden ser representadas por cualquier letra.

Además, diremos que la n-upla $(s_1, s_2, \dots, s_3)$ es una ***solución de una ecuación lineal*** si al reemplazar estos valores en la ecuación la igualdad se cumple, es decir,

$$a_1s_1 + a_2s_2 + \cdots + a_ns_n = b$$

Ejemplo 2.1

Las siguientes ecuaciones son algunos ejemplos de ecuaciones lineales:

$$2x\text{-}y = 1 \qquad x\text{-}3y + z + w = -5 \qquad -2x\text{-}4y + z = 5$$

Estas tres ecuaciones son lineales porque tienen la forma que hemos visto antes, es decir, *las dos variables son potencias con exponente uno, no existen productos entre las variables y no hay variables en el denominador de alguna fracción.*

Ejemplo 2.2

Sin embargo, estas ecuaciones no son lineales. *¿Por qué?*

$$x^2\text{-}y = 1 \qquad \frac{2}{x} + y = 2 \qquad xy = 2$$

Definición 2.2

Hernández y Elina (2022) definen un **sistema de ecuaciones lineale**s como un conjunto de dos o más ecuaciones lineales, y nos interesa encontrar una solución que satisfaga a todas ellas, es decir que, al sustituir la solución en cualquier ecuación, la igualdad se cumpla, a esto lo llamaremos **solución del sistema de ecuaciones**.

Planteamiento de un sistema de ecuaciones lineales

Empecemos a estudiar los sistemas de ecuaciones lineales a partir de un problema.

PROBLEMA 2.1

Una granja ha concretado una venta de $1560 por 15 cerdos, 6 pavos y 12 gallinas. Se desea conocer el costo de cada animal sabiendo que 1 pavo cuesta el doble de una gallina y que un cerdo cuesta lo mismo que 6 gallinas más 4 pavos.

SOLUCIÓN

Lo primero que hacemos es definir nuestras variables:

c : Costo en dólares de cada cerdo.
g : Costo en dólares de cada gallina.
p: Costo en dólares de cada pavo.

Ahora vamos a expresar nuestro problema en términos matemáticos:

Esta parte del problema "*…una venta de $1560 por 15 cerdos, 6 pavos y 12 gallinas…*" la podemos escribir como:

$$15c + 6p + 12g = 1560 \quad (1)$$

Del mismo modo: "*…1 pavo cuesta el doble de una gallina…*" puede escribirse como:

$$1p = 2g \quad (2)$$

Finalmente: "*…un cerdo cuesta lo mismo que 6 gallinas más 4 pavos…*"

$$1c = 6g + 4p \quad (3)$$

Entonces nos interesa encontrar los valores de las variables c, g y p que satisfagan las tres ecuaciones a la vez.

Para ello, escribiremos un ***Sistema de Ecuaciones Lineales*** a partir de las ecuaciones *1, 2* y *3:*

$$\begin{cases} 15c + 6p + 12g = 1560 \\ 1p = 2g \\ 1c = 6g + 4p \end{cases}$$

Hasta el momento, lo que hemos hecho es escribir el sistema de ecuaciones lineales asociado a nuestro problema.

Solución de un sistema de ecuaciones mediante el Regla de Cramer

El sistema planteado en el apartado anterior puede ser resuelto con diferentes técnicas, pero ahora estudiaremos la **Regla de Cramer** para lo cual necesitaremos los determinantes.

El primer paso del método es organizar el sistema de manera que todas las variables estén de un lado de la ecuación en un mismo orden y los términos independientes del otro:

$$\begin{cases} 15c + 6p + 12g = 1560 \\ 1p\text{-}2g = 0 \\ 1c\text{-}4p\text{-}6g = 0 \end{cases}$$

Ahora construiremos una matriz *de coeficientes* cuyo determinante hemos calculado usando la Regla de Sarrus:

$$\Delta A = \begin{vmatrix} 15 & 6 & 12 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & -4 & -6 \end{vmatrix} = -234$$

A continuación, calcularemos el determinante de tres matrices (una por cada variable) construidas al sustituir los coeficientes de cada variable por los términos independientes correspondientes a cada ecuación. Estas matrices las denotaremos como $\Delta C,\ \Delta P\ y\ \Delta G$ haciendo referencia a las letras usadas para definir cada variable. Así tendríamos:

$$\Delta C = \begin{vmatrix} 1560 & 6 & 12 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -4 & -6 \end{vmatrix} = -21840$$

$$\Delta P = \begin{vmatrix} 15 & 1560 & 12 \\ 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -6 \end{vmatrix} = -3120$$

$$\Delta G = \begin{vmatrix} 15 & 6 & 1560 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 0 \end{vmatrix} = -1560$$

Finalmente, la Regla de Cramer (Nuñez *et al.*, 2019) nos indica que la solución del sistema vendrá dada por:

$$c = \frac{\Delta C}{\Delta A}; \quad p = \frac{\Delta P}{\Delta A}; \quad g = \frac{\Delta G}{\Delta A}$$

Es decir,

$$c = \frac{-21840}{-234} \approx 93{,}33$$

$$p = \frac{-3120}{-234} \approx 13{,}33$$

$$g = \frac{-1560}{-234} \approx 6{,}66$$

Por lo tanto, el costo de cada cerdo fue de $93,33. Cada pavo fue vendido por $13,33 y cada gallina fue vendida por $6,66.

Para aclarar cualquier duda respecto a la solución de un sistema de ecuaciones lineales por la Regla de Cramer resolvamos otro problema fuera de contexto:

Ejercicio 2.1

Encuentre la solución del siguiente sistema:

$$\begin{cases} 5x + 6y - 12z = 5 \\ x + 2y - 2z = -4 \\ 2x - 2y - 6z = 1 \end{cases}$$

Solución

Calculamos el determinante de la matriz de coeficientes usando la Regla de Sarrus (o cualquier otro método):

$$\Delta A = \begin{vmatrix} 5 & 6 & -12 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & -6 \end{vmatrix} = 4$$

Calculamos los determinantes asociados a cada variable.

$$\Delta X = \begin{vmatrix} 5 & 6 & -12 \\ -4 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & -6 \end{vmatrix} = -308$$

$$\Delta Y = \begin{vmatrix} 5 & 5 & -12 \\ 1 & -4 & -2 \\ 2 & 1 & -6 \end{vmatrix} = 32$$

$$\Delta Z = \begin{vmatrix} 5 & 6 & 5 \\ 1 & 2 & -4 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -114$$

La Regla de Cramer nos indica que la solución del sistema será igual a:

$$x = \frac{\Delta X}{\Delta A}; \quad y = \frac{\Delta Y}{\Delta A}; \quad z = \frac{\Delta Z}{\Delta A}$$

Si reemplazamos los valores obtenemos:

$$x = \frac{-308}{4}; \quad y = \frac{32}{4}; \quad z = \frac{-114}{4}$$

Finalmente, al simplificar las fracciones obtenemos la solución de nuestro sistema de ecuaciones lineales:

$$x = -77; \quad y = 8; \quad z = \frac{-57}{2}$$

Veamos otros problemas aplicados a la actividad agropecuaria.

Problema 2.2

Por 450 kilogramos de *papas* y 755 kilogramos de *zanahorias* se pagan 124 dólares. Si por 933 kilogramos de *papas* y 457 kilogramos de *zanahorias* el monto a cancelar es 154 dólares. ¿Cuál es el valor para cancelar en dólares por kilogramo de *papa* y *zanahoria*?

Solución

Procedemos a definir dos incógnitas que deben responder a la pregunta ¿Cuál es el valor para cancelar en dólares por kilogramo de *papa* y *zanahoria*?

$$p\text{: } Valor\ a\ cancelar\ en\ dólares\ por\ kg\ de\ papa.$$

$$z\text{: } Valor\ a\ cancelar\ en\ dólares\ por\ kg\ de\ zanahoria.$$

Definidas estas incógnitas e interpretando el enunciado del problema, procedemos con el planteamiento del sistema de ecuaciones lineales el cual resulta:

$$\begin{cases} 450p + 755z = & 124 \\ 933p + 457z = & 154 \end{cases}$$

Este sistema mediante el uso de la Regla de Cramer resulta:

$$\Delta A = \begin{vmatrix} 450 & 755 \\ 933 & 457 \end{vmatrix} = -498765; \quad \Delta P = \begin{vmatrix} 124 & 755 \\ 154 & 457 \end{vmatrix} = -59602$$

$$\Delta Z = \begin{vmatrix} 450 & 124 \\ 933 & 457 \end{vmatrix} = -46392$$

$$\frac{\Delta P}{\Delta A} = p = \frac{-59602}{-498765} = 0{,}119; \quad \frac{\Delta Z}{\Delta A} = z = \frac{-46392}{-498765} = \frac{-15464}{-166255} = 0{,}093$$

Es decir, por kilogramo de *papa* y *zanahoria* se cancela: \$0,119 y \$0,093 respectivamente.

Problema 2.3

La ganancia de una granja productora de *fréjol* y *maíz* durante el año 2020 fue de: 12650 dólares. Si la ganancia en el frejol fue 3 veces más que la del maíz. Determine la ganancia en dólares por la venta de la producción de *fréjol* y *maíz* durante el año 2020.

Solución

Definimos dos incógnitas, para esto nos remitimos a la interrogante debemos calcular la ganancia en dólares por la venta de la producción de *fréjol* y *maíz* durante el año 2020.

f: *Ganacia en dólares por la venta de fréjol en el año* 2020.

m: *Ganacia en dólares por la venta de maíz en el año* 2020.

Definidas estas dos variables y con el enunciado del problema, procedemos con el planteamiento del sistema de ecuaciones el cual resulta:

$$\begin{cases} f + m = & 12650 \\ f = & 3m \end{cases}$$

Reordenando el sistema resulta:

$$\begin{cases} f + m = & 12650 \\ f\text{-}3m = & 0 \end{cases}$$

Este sistema mediante el uso de la Regla de Cramer resulta:

$$\Delta B = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -4 \qquad \Delta F = \begin{vmatrix} 12650 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -37950$$

$$\Delta M = \begin{vmatrix} 1 & 12650 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -12650$$

$$\frac{\Delta F}{\Delta B} = f = \frac{-37950}{-4} = 9487{,}5; \quad \frac{\Delta M}{\Delta B} = m = \frac{-12650}{-4} = 3162{,}5$$

Este resultado indica que la ganancia por la venta de fréjol y maíz durante el año 2020 fue de: \$9487,5 y \$3162,5 respectivamente.

Problema 2.4

En la granja Cayambe hay *cerdos* y *gallinas* que hacen un total de *121* cabezas y *388* patas. ¿Cuántos cerdos y gallinas hay en la granja?

Solución

Procedemos a definir las incógnitas cuyo resultado responderá a la pregunta. ¿Cuántos *cerdos* y *gallinas* hay en la granja?

$$c: Cantidad\ de\ cerdos\ que\ hay\ en\ la\ granja.$$

$$g: Cantidad\ de\ gallinas\ que\ hay\ en\ la\ granja.$$

Definidas las variables y con la información del enunciado del problema procedemos a plantear el sistema de ecuaciones, tal como se muestra a continuación:

$$\begin{cases} c + g = & 121 \\ 4c + 2g = & 388 \end{cases}$$

Este sistema mediante el uso la Regla de Cramer resulta:

$$\Delta A = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = -2; \quad \Delta C = \begin{vmatrix} 121 & 1 \\ 388 & 2 \end{vmatrix} = -146$$

$$\Delta G = \begin{vmatrix} 1 & 121 \\ 4 & 388 \end{vmatrix} = -96$$

$$\frac{\Delta C}{\Delta A} = c = \frac{-146}{-2} = 73; \quad \frac{\Delta G}{\Delta A} = g = \frac{-96}{-2} = 48$$

El resultado indica que en la granja hay: 73 *cerdos* y 48 *gallinas.*

Problema 2.5

La venta de *girasoles* y *rosas* de una finca florícola durante el mes de enero del año *2020* fue de *142345* dólares. Si la venta de *girasoles* fue 3 veces mayor que la venta de *rosas*. Determine el ingreso en dólares por la venta de *girasoles* y *rosas* durante el mes de enero del año *2020*.

Solución

Definimos dos incógnitas, para esto nos remitimos a la interrogante y debemos calcular el ingreso en dólares por la venta de *girasoles* y *rosas* durante el mes de enero del año *2020*.

g: *Ingreso en dólares por la venta de girasoles en el mes de enero* 2020.

r: *Ingreso en dólares por la venta de rosas en el mes de enero* 2020.

Definidas estas dos variables y con el enunciado del problema procedemos con el planteamiento del sistema de ecuaciones el cual resulta:

$$\begin{cases} g + r = & 142345 \\ g = & 3r \end{cases}$$

Reordenando el sistema resulta

$$\begin{cases} g + r = & 142345 \\ g\text{-}3r & 0 \end{cases}$$

Este sistema mediante el uso de la Regla de Cramer resulta:

$$\Delta A = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \text{-}3 \end{vmatrix} = -4; \quad \Delta G = \begin{vmatrix} 142345 & 1 \\ 0 & \text{-}3 \end{vmatrix} = -427035$$

$$\Delta R = \begin{vmatrix} 1 & 142345 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -142345$$

$$\frac{\Delta G}{\Delta A} = g = \frac{\text{-}427035}{\text{-}4} = 106758{,}75; \quad \frac{\Delta R}{\Delta A} = r = \frac{\text{-}142345}{\text{-}4} = 35586{,}25$$

El resultado indica que el ingreso en dólares por la venta de los *girasoles* y *rosas* fue de: \$106750,75 y \$35586,25, respectivamente.

Problema 2.6

Una fábrica de lácteos vendió tres tipos de queso durante un mes: *mozzarella*, *amasado* y *queso de hoja*. Los precios de cada uno de ellos fueron de: \$10/kg, 8/kg y \$7/kg respectivamente. Si se sabe que el total de kilogramos vendidos fue 50, que la venta total en dólares fue 400 y que el número de kilogramos de *queso de hoja* vendidos fue el triple de *queso amasado*. ¿Cuántos kilogramos de queso *mozzarella, amasado* y de *hoja* vendió la fábrica durante el mes?

Solución

Procedemos a definir las incógnitas del sistema de ecuaciones las cuales deben responder a la pregunta. ¿Cuántos kilogramos de *queso mozzarella, amasado* y *queso de hoja* vendió la granja durante el mes?

$$m: cantidad\ en\ kilogramos\ de\ queso\ mozzarella\ vendidos.$$

$$a: cantidad\ en\ kilogramos\ de\ queso\ amasado\ vendidos.$$

$$h: cantidad\ en\ kilogramos\ de\ queso\ de\ hoja\ vendidos.$$

Definidas las tres variables $m, a\ y\ h$ y con la información del enunciado del problema procedemos a plantear el sistema de ecuaciones, el cual resulta:

$$\begin{cases} m + a + h = 50 \\ 10m + 8a + 7h = 400 \\ h = 3a \end{cases}$$

Reordenando el sistema resulta:

$$\begin{cases} m + a + h = 50 \\ 10m + 8a + 7h = 400 \\ -3a + h = 0 \end{cases}$$

Este sistema utilizando la Regla de Cramer resulta:

$$\Delta C = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 10 & 8 & 7 \\ 0 & -3 & 1 \end{vmatrix} = -11; \quad \Delta M = \begin{vmatrix} 50 & 1 & 1 \\ 400 & 8 & 7 \\ 0 & -3 & 1 \end{vmatrix} = -150$$

$$\Delta A = \begin{vmatrix} 1 & 50 & 1 \\ 10 & 400 & 7 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -100; \quad \Delta H = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 50 \\ 10 & 8 & 400 \\ 0 & -3 & 0 \end{vmatrix} = -300$$

$$\frac{\Delta M}{\Delta C} = m = \frac{-150}{-11} = 13{,}64; \quad \frac{\Delta A}{\Delta C} = a = \frac{-100}{-11} = 9{,}09$$

$$\frac{\Delta H}{\Delta C} = h = \frac{-300}{-11} = 27{,}27$$

Es decir; la fábrica vendió durante el mes 13,64 kilogramos de *queso mozzarella*, 9,09 kilogramos de *queso amasad*o y $27,27 kilogramos de *queso de hoja*.

Como hemos podido notar los sistemas de ecuaciones que resolvimos con la Regla de Cramer tienen una única solución, cuando esto ocurre decimos que el sistema es **compatible determinado**.

Problema 2.7

Una granja obtiene una ganancia de 2450 dólares al mes por la venta de *leche* y *queso*. Si la ganancia generada por la venta de *queso* fue el doble en comparación al ingreso generado por la venta de *leche*. ¿Cuánto es la ganancia en dólares generada por la comercialización de la *leche*?

Solución

Procedemos a definir dos incógnitas una de ellas representará la ganancia en dólares por la venta de *leche* durante el mes, la otra indicará la ganancia en dólares generara por la comercialización del *queso* durante el mes, es decir:

$$l: \textit{Ganancia en dólares por venta de leche durante el mes}.$$

$$q: \textit{Ganancia en dólares por la venta de queso durante el mes}.$$

Definidas las variables y con la información planteada en el ejemplo práctico procedemos a plantear del sistema de ecuaciones, el cual resulta:

$$\begin{cases} l + q = & 2450 \\ \quad q = & 2l \end{cases}$$

Reordenando el sistema resulta:

$$\begin{cases} l + q = & 2450 \\ -2l + q = & 0 \end{cases}$$

Este sistema mediante el uso de la Regla de Cramer resulta:

$$\Delta A = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 3; \quad \Delta L = \begin{vmatrix} 2450 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2450$$

$$\frac{\Delta L}{\Delta A} = \; l = \frac{2450}{3} = 816{,}67$$

El resultado indica que la granja obtuvo una ganancia de $816,67 por la comercialización de la *leche*.

Problema 2.8

La ganancia de 12500 dólares generados por venta de hortalizas debe repartirse entre tres productoras: *Teresa, Patricia* y *Carmen*. *Teresa* se lleva el doble de la ganancia de *Patricia* y *Carmen* se lleva el triple de la ganancia de *Teresa*. Determine la ganancia en dólares de cada productora.

Solución

Procedemos a definir las incógnitas del sistema de ecuaciones las cuales deben responder al cálculo de la ganancia en dólares de cada productora.

t: *Ganancia en dólares para Teresa*.

p: *Ganancia en dólares para Patricia*.

c: *Ganancia en dólares para Carmen*.

Definidas las tres variables y con la interpretación del enunciado del problema se procede con el planteamiento del sistema de ecuaciones, tal como se muestra a continuación:

$$\begin{cases} t+p+c = \ 12500 \\ t = 2p \\ c = 3t \end{cases}$$

Reordenando el sistema resulta:

$$\begin{cases} t+p+c = \ 12500 \\ t\text{-}2p = 0 \\ \text{-}3t + c = 0 \end{cases}$$

Este sistema mediante el uso de la Regla de Cramer resulta:

$$\Delta A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \text{-}2 & 0 \\ \text{-}3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -9; \quad \Delta T = \begin{vmatrix} 12500 & 1 & 1 \\ 0 & \text{-}2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -25000$$

$$\Delta P = \begin{vmatrix} 1 & 12500 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ \text{-}3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -12500; \quad \Delta C = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 12500 \\ 1 & \text{-}2 & 0 \\ \text{-}3 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -75000$$

$$\frac{\Delta T}{\Delta A} = t = \frac{\text{-}25000}{\text{-}9} = 2777{,}77\ ; \quad \frac{\Delta P}{\Delta A} = p = \frac{\text{-}12500}{\text{-}9} = 1388{,}89$$

$$\frac{\Delta C}{\Delta A} = c = \frac{\text{-}75000}{\text{-}9} = 8333{,}33$$

Es decir; la ganancia en dólares generada por la venta de hortalizas de *Teresa* fue de: \$2777,77, de *Patricia* \$1388,89 y de *Carmen* \$8333,33.

Problema 2.9

Un comerciante vende tres tipos de balanceados: *balanceado A*, *balanceado B* y *balanceado C*, el costo de fabricación por cada saco es de \$11,5, \$16 y \$20, respectivamente. Si cada saco de *balanceado* lo vende en orden respectivo en: \$23, \$29 y \$40 y en total vende 22 sacos; para lo cual invierte \$353 y obtiene un ingreso total de \$679. ¿Cuántos sacos de *balanceados* de cada tipo vendió?

Solución

Procedemos a definir las incógnitas del sistema de ecuaciones las cuales deben responder a la interrogante ¿Cuántos sacos de *balanceados de cada tipo* vendió?

$$a\text{: } Cantidad\ de\ sacos\ vendidos\ de\ balanceado\ A$$

$$b\text{: } Cantidad\ de\ sacos\ vendidos\ de\ balanceado\ B$$

$$c\text{: } Cantidad\ de\ sacos\ vendidos\ de\ balanceado\ C$$

Definidas las tres variables y con la interpretación del enunciado del problema procedemos a plantear el sistema de ecuaciones, tal como se muestra a continuación:

$$\begin{cases} a+b+c = 22 \\ 11{,}5a+16b+20c = 353 \\ 23a+29b+40c = 679 \end{cases}$$

Este sistema mediante el uso de la Regla de Cramer resulta:

$$\Delta D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 23/2 & 16 & 20 \\ 23 & 29 & 40 \end{vmatrix} = \frac{51}{2}; \quad \Delta A = \begin{vmatrix} 22 & 1 & 1 \\ 353 & 16 & 20 \\ 679 & 29 & 40 \end{vmatrix} = 153$$

$$\Delta B = \begin{vmatrix} 1 & 22 & 1 \\ 23/2 & 353 & 20 \\ 23 & 679 & 40 \end{vmatrix} = \frac{459}{2}; \quad \Delta C = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 22 \\ 23/2 & 16 & 353 \\ 23 & 29 & 679 \end{vmatrix} = \frac{357}{2}$$

$$\frac{\Delta A}{\Delta D} = a = \frac{153}{\frac{51}{2}} = 6; \quad \frac{\Delta B}{\Delta D} = b = \frac{\frac{459}{2}}{\frac{51}{2}} = 9; \quad \frac{\Delta C}{\Delta D} = c = \frac{\frac{357}{2}}{\frac{51}{2}} = 7$$

Esto significa que el comerciante vendió 6 sacos de *balanceados del tipo A*, 9 *tipo B* y 7 *tipo C.*

Problema 2.10

Una granja productora de *coliflor, lechuga, brócoli* y *col* vende entre toda la cosecha *500* kilos. Si el kilo de cada hortaliza lo vendió a: $1, $0,90, $1,50 y 0,80 respectivamente, y el total del ingreso fue de $435. Además, la venta de *lechuga* fue el doble de la cantidad vendida de *brócoli* y la venta de la cantidad de *col* fue el triple de la *coliflor* y *lechuga.* Determine la cantidad en kilos de *coliflor, lechuga, brócoli* y *col* que vendió la granja.

Solución

Procedemos a definir las incógnitas del sistema de ecuaciones las cuales deben responder al cálculo de la cantidad en kilogramos de *coliflor, lechuga, brócoli* y *col* que vendió la granja.

$$c: Cantidad\ en\ kilogramos\ de\ coliflor\ vendido.$$

$$l: Cantidad\ en\ kilogramos\ de\ lechuga\ vendida.$$

$$b: Cantidad\ en\ kilogramos\ de\ brócoli\ vendido.$$

$$co: Cantidad\ en\ kilogramos\ de\ col\ vendido.$$

Definidas las cuatro variables y con la interpretación del enunciado del problema procedemos a plantear el sistema de ecuaciones, el cual resulta:

$$\begin{cases} c + l + b + co = \quad 500 \\ c + 0{,}9l + 1{,}5b + 0{,}8co = 435 \\ l = 2b \\ co = 3(c + l) \end{cases}$$

Reordenado el sistema resulta:

$$\begin{cases} c + l + b + co = \quad 500 \\ c + 0{,}9l + 1{,}5b + 0{,}8co = 435 \\ l\text{-}2b = 0 \\ \text{-}3c\text{-}3l + co = 0 \end{cases}$$

Este sistema mediante el uso la Regla de Cramer resulta:

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 9/10 & 3/2 & 4/5 \\ 0 & 1 & \text{-}2 & 0 \\ \text{-}3 & \text{-}3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \text{-}\frac{9}{5}; \quad \Delta R = \begin{vmatrix} 500 & 1 & 1 & 1 \\ 435 & 9/10 & 3/2 & 4/5 \\ 0 & 1 & \text{-}2 & 0 \\ 0 & \text{-}3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

$$L = \begin{vmatrix} 1 & 500 & 1 & 1 \\ 1 & 435 & 3/2 & 4/5 \\ 0 & 0 & \text{-}2 & 0 \\ \text{-}3 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -80; \quad \Delta B = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 500 & 1 \\ 1 & 9/10 & 435 & 4/5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \text{-}3 & \text{-}3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -4$$

$$\Delta T = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 500 \\ 1 & 9/10 & 3/2 & 435 \\ 0 & 1 & \text{-}2 & 0 \\ \text{-}3 & \text{-}3 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -645$$

$$\frac{\Delta R}{\Delta A} = c = \frac{\text{-}135}{\frac{\text{-}9}{5}} = 75; \quad \frac{\Delta L}{\Delta A} = l = \frac{\text{-}80}{\frac{\text{-}9}{5}} = \frac{400}{9} = 44{,}44$$

$$\frac{\Delta B}{\Delta A} = b = \frac{\text{-}40}{\frac{\text{-}9}{5}} = \frac{200}{9} = 22{,}22; \quad \frac{\Delta T}{\Delta A} = co = \frac{\text{-}645}{\frac{\text{-}9}{5}} = \frac{1075}{3} = 358{,}33$$

El resultado muestra que la granja vendió: 75 kg de *coliflor*, 44,44 kg de *lechuga*, 22,22 kg de *brócoli* y 358,33 kg de *col*.

Sistemas de ecuaciones cuadrados y no-cuadrados

La Regla de Cramer es una herramienta útil para resolver sistemas de ecuaciones lineales cuando son compatibles determinados. El lector pudo notar que para calcular el valor de cada variable debíamos dividir por ΔA, que por estar en el denominador de la fracción no puede ser cero. Es decir, si el determinante de la matriz de coeficiente es igual a cero entonces este método falla y podremos afirmar que el sistema no tiene una única solución.

Por otro lado, hemos visto que los sistemas que hemos formado hasta el momento están constituidos por un mismo número de ecuaciones y de incógnitas, generando una matriz de coeficientes cuadrada, a este tipo de sistema lo llamaremos **cuadrado.** Esta es otra de las limitantes de la Regla de Cramer, solo funciona para sistemas cuadrados.

Cuando un sistema de ecuaciones tenga diferente número de ecuaciones y de incógnitas diremos que es un sistema **no-cuadrado.**

Entenderemos por sistemas de ecuaciones lineales no-cuadrados a aquellos que no tienen el mismo número de ecuaciones y de incógnitas.

Ejemplo 2.3

Los siguientes son algunos ejemplos de estos sistemas:

$$1)\ \begin{cases} 2x\text{-}y + 2z = 2 \\ \text{-}3x\text{-}3y + z = -1 \end{cases} \quad 2)\ \begin{cases} x\text{-}y = -2 \\ x\text{-}3y = -3 \\ x\text{-}2y = 5 \end{cases}$$

El primer sistema tiene dos ecuaciones y tres incógnitas, mientras el segundo tiene tres ecuaciones y dos incógnitas. Por lo tanto, ninguno de los dos puede resolverse usando la Regla de Cramer, para resolver estos sistemas vamos a introducir un nuevo método que estudiaremos en el siguiente apartado, pero antes veamos un ejemplo de aplicación donde el número de ecuaciones y de incógnitas no coinciden.

Problema 2.11

En una granja hay cierto número de *cerdas* y de *vacas*; cada *cerda* pare en promedio 8 crías y cada *vaca* pare un becerro. Si para un determinado momento hay 40 crías nacidas entre *cerdos* y becerros. ¿Cuántas *vacas* había?

Solución

Procedemos a definir las incógnitas del sistema de ecuaciones cuya solución debe responder a la pregunta ¿Cuántas *vacas* había?

$$c\text{: } \textit{Número de cerdas que hay en la granja.}$$

$$v\text{: } \textit{Número de vacas que hay en la granja.}$$

Definidas las variables y con la interpretación del enunciado del problema procedemos a plantear el sistema de ecuaciones, tal como se muestra a continuación:

$$8c + v = 40$$

Observamos que hemos encontrado una ecuación con dos incógnitas (sistema no-cuadrado). Para encontrar la solución despejamos la incógnita v (número de vacas) $v = 40 - 8c$ y dejamos como variable libre la c (número de cerdas).

Hemos encontrado una ecuación que depende de c (*cerdas*), ahora bien, observe que el valor que puede tomar c (*cerdas*) para que v (*vacas*) resulte un número natural es: $1 \leq c \leq 5$, es decir este sistema tiene un número finito de soluciones que en este caso corresponde a 4, debido al contexto del problema porque, si $c = 5$, la cantidad de vacas sería cero, y este no es un número natural.

Ahora si el valor de c (*cerdas*) es igual a 1, el número de *vacas* que había en la granja sería: 32. Si $c = 2$, la cantidad de *vacas* es: 24. Si $c = 3$, la cantidad de *vacas* es: 16.

Finalmente, si $c = 4$, la cantidad de *vacas* es: 8.

Método de Gauss-Jordan para resolver un sistema de ecuaciones

Para poder aplicar este método debemos entender qué es un **pivote** y cómo aplicar las **operaciones elementales sobre fila** y nos apoyaremos en las obras de Skiba (2019) y Castañeda *et al.* (2020).

Definición 2.3

Un **pivote** es el primer número diferente de cero de izquierda a derecha que tenga cada fila de una matriz.

Ejemplo 2.4

Por ejemplo, en la matriz $\begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ el pivote de la fila uno es 3, de la dos es 5 y de la fila 3 es el número 2.

Por otro lado, existen tres operaciones elementales que pueden aplicarse a las filas de una matriz, las explicamos a continuación por medio de algunos ejemplos:

a) Intercambiar dos filas

Ejemplo 2.5

Sea la matriz, $A = \begin{bmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & -3 \end{bmatrix}$. Podemos encontrar una matriz equivalente a ella (pero no igual) cambiando la fila uno por la fila dos. Esto lo escribiremos en adelante como sigue:

$$\begin{bmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & -3 \end{bmatrix} \; f_1 \quad \leftrightarrow \quad f_2 \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -2 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

b) Cambiar una fila por un múltiplo escalar de otra.

Ejemplo 2.6

Sea la matriz, $A = \begin{bmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & -3 \end{bmatrix}$. Podemos cambiar una fila por un múltiplo escalar de ella. Por ejemplo,

$$\begin{bmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & -3 \end{bmatrix} f_1 \quad \rightarrow \quad 3 \cdot f_1 \begin{bmatrix} -6 & 9 & -3 \\ 1 & 2 & -3 \end{bmatrix}$$

Es importante mencionar que, en este caso, el escalar debe ser necesariamente diferente de cero.

c) Cambiar una fila por un múltiplo escalar de otra sumada con ella.

Ejemplo 2.7

Digamos que tenemos la matriz $A = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ entonces podemos encontrar una matriz equivalente a ella cambiando una fila por el múltiplo de cualquier otra sumada con ella misma. Por ejemplo,

$$\begin{bmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} f_1 \quad \rightarrow \quad 3 \cdot f_3 + f_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 2 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

En detalle, hicimos lo siguiente en la primera fila:

$$3 \cdot f_3 + f_1$$

$$3 \cdot [1 \quad -1 \quad 2] + [-2 \quad 3 \quad 1]$$

$$[3 \quad -3 \quad 6] + [-2 \quad 3 \quad 1]$$

$$[1 \quad 0 \quad 7]$$

Conociendo lo anterior procedemos a resolver un primer sistema de ecuaciones utilizando el método de *Gauss-Jordan* (Nuñez, *et al.*, 2019; Skiba, 2019).

Ejercicio 2.2

Utilice el método de Gauss-Jordan para resolver el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} 2x\text{-}y + 2z = 2 \\ \text{-}3x\text{-}3y + z = -1 \end{cases}$$

Solución

Antes de iniciar con el método debemos escribir la matriz ampliada (Estruch *et al.*, 2017) que es la matriz de coeficientes adjuntando los términos independientes:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 2 & 2 \\ -3 & -3 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

Ahora, el primer paso del método consiste en convertir el elemento en la posición a_{11} en 1. Para ello, aplicamos la segunda operación elemental cambiando la fila 1 por la misma fila multiplicada por el inverso del número que queremos convertir, en este caso el inverso del 2.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 2 & 2 \\ -3 & -3 & 1 & -1 \end{array}\right] \; f_1 \;\; \rightarrow \;\; \frac{1}{2} \cdot f_1 \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1/2 & 1 & 1 \\ -3 & -3 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

Diremos que la fila 1 es nuestra fila pivote y su pivote es el 1.

El segundo paso es volver cero los demás elementos que se encuentren en la columna del pivote de la primera fila. Para ello, aplicamos la tercera operación elemental, cambiaremos la fila dos por 3 veces la fila 1 más la fila 2.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1/2 & 1 & 1 \\ -3 & -3 & 1 & -1 \end{array}\right] \; f_2 \;\; \rightarrow \;\; 3 \cdot f_1 + f_2 \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1/2 & 1 & 1 \\ 0 & 3/2 & 4 & 2 \end{array}\right]$$

El siguiente paso es volver 1 el pivote de la segunda fila, en este caso 3/2. Para ello, solo debemos cambiar la fila 2 por 2/3 de ella. Esta nueva fila 2 será nuestra nueva fila pivote.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1/2 & 1 \\ 0 & 3/2 & 4 \end{bmatrix}\left|\begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix}\right] \; f_2 \quad \to \quad \frac{2}{3}\cdot f_2 \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & 1 \\ 0 & 1 & 8/3 \end{bmatrix}\left|\begin{matrix} 1 \\ 4/3 \end{matrix}\right]$$

Finalmente, debemos aplicar el paso número dos de nuevo, es decir, volver cero los elementos que estén en la columna de nuestro nuevo pivote. A tal fin, vamos a cambiar la fila 1 por 1/2 (opuesto del número que deseamos anular) de la fila pivote (que ahora es la fila 2) más la fila 1.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1/2 & 1 \\ 0 & 1 & 8/3 \end{bmatrix}\left|\begin{matrix} 1 \\ 4/3 \end{matrix}\right] \; f_1 \quad \to \quad \frac{1}{2}\cdot f_2 + f_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 7/3 \\ 0 & 1 & 8/3 \end{bmatrix}\left|\begin{matrix} 5/3 \\ 4/3 \end{matrix}\right]$$

La matriz de coeficientes $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 7/3 \\ 0 & 1 & 8/3 \end{bmatrix}$ recibe el nombre de **matriz escalonada reducida por filas**. Estas matrices se definen de la siguiente forma Núñes *et al.* (2019); Skiba (2019):

Definición 2.4

Matriz escalonada por filas

- Si existe una fila nula, debe estar de última.
- El pivote de cada fila debe ser 1.
- Entre dos filas consecutivas el pivote debe estar a la derecha del pivote de la fila inmediata superior.
- Los elementos que estén por encima de cada pivote deben ser ceros.

Una vez que hemos aplicado este proceso podemos reescribir nuestro sistema de ecuaciones, pero ahora tomando en cuenta como coeficientes los obtenidos en nuestra última matriz. En lugar de resolver el sistema original $\begin{cases} 2x - y + 2z = 2 \\ -3x - 3y + z = -1 \end{cases}$ vamos a resolver este:

$$\begin{cases} x + \frac{7}{3}z = \frac{5}{3} \\ y + \frac{8}{3}z = \frac{4}{3} \end{cases}$$

Como podemos ver, este sistema tiene dos ecuaciones con tres incógnitas, en estos casos dejamos una **variable libre**, es decir, una variable que puede tomar cualquier valor real y que por facilidad siempre tomaremos la variable cuyos coeficientes son distintos de uno, en este caso la variable *z*. Así, la solución del sistema viene dada por:

$$\begin{cases} x = \frac{5}{3} - \frac{7}{3}z \\ y = \frac{4}{3} - \frac{8}{3}z \\ z \in \boldsymbol{R} \end{cases}$$

Este sistema diremos que **compatible indeterminado** ya que tiene infinitas soluciones, es decir, para cada valor que asignemos a *z* (de los infinitos que puede tomar) podremos encontrar un valor para *x* y otro para *y*. Algunos ejemplos de soluciones para este sistema son los siguientes:

x	y	z
4	*4*	*-1*
26/3	*28/3*	*-3*
5/3	*4/3*	*0*
-2/3	*-4/3*	*1*
-16/3	*-20/3*	*3*

Como vemos podemos encontrar infinitas soluciones solo asignándole a la variable libre (*z*) valores arbitrarios. Sin embargo, hay que tomar en cuenta que en un problema de aplicación solo podremos fijar valores que guarden coherencia con el contexto del problema como lo veremos en algunos ejemplos más adelante.

Ejercicio 2.3

Analice la solución del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 2x - y = -2 \\ x - 3y = -3 \\ -x + 2y = -5 \end{cases}$$

Solución

Este sistema de ecuaciones no es cuadrado porque tiene tres ecuaciones y solo dos incógnitas, por ello no podemos aplicar el método de Cramer. Por lo tanto, usaremos el método de Gauss-Jordan para encontrar su solución.

Armamos una matriz ampliada usando los coeficientes de la variable y los términos independientes:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & -2 \\ 1 & -3 & -3 \\ -1 & 2 & -5 \end{array}\right]$$

Vamos a convertir el pivote de la primera fila en 1, en este caso basta con cambiar la fila 1 por la fila 2. En caso de que la fila 2 no tuviera como pivote al 1, solo tendríamos que multiplicar por 1/2 la fila uno y así cambiaríamos el pivote de esta fila en 1.

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & -2 \\ 1 & -3 & -3 \\ -1 & 2 & -5 \end{array}\right] \; f_1 \;\rightarrow\; f_2 \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & -3 \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & -5 \end{array}\right]$$

Ahora debemos volver ceros todos los números que estén en la columna del pivote de la fila 1. Para ello, usamos la tercera operación elemental:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & -3 \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & -5 \end{array}\right] \; f_2 \;\rightarrow\; -2 \cdot f_1 + f_2 \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & -3 \\ 0 & 5 & 4 \\ -1 & 2 & -5 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & -3 \\ 0 & 5 & 4 \\ -1 & 2 & -5 \end{array}\right] \; f_3 \;\rightarrow\; 1 \cdot f_1 + f_3 \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & -3 \\ 0 & 5 & 4 \\ 0 & -1 & -8 \end{array}\right]$$

Ahora vamos a cambiar de pivote, y ponemos nuestra atención en la segunda fila, lo que nos dice el método es que el pivote de esta fila debe ser 1. Para ello, solo debemos multiplicar la fila 2 por 1/5 (el inverso del pivote de esta fila):

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & -3 \\ 0 & 5 & 4 \\ 0 & -1 & -8 \end{array}\right] \quad f_2 \quad \rightarrow \quad \frac{1}{5} \cdot f_2 \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & 4/5 \\ 0 & -1 & -8 \end{array}\right]$$

Repetimos el tercer paso, es decir, debemos anular todos los elementos que estén en la columna del pivote de la fila 2.

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & 4/5 \\ 0 & -1 & -8 \end{array}\right] \quad f_1 \quad \rightarrow \quad 3 \cdot f_2 + f_1 \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -3/5 \\ 0 & 1 & 4/5 \\ 0 & -1 & -8 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -3/5 \\ 0 & 1 & 4/5 \\ 0 & -1 & -8 \end{array}\right] \quad f_3 \quad \rightarrow \quad 1 \cdot f_2 + f_3 \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -3/5 \\ 0 & 1 & 4/5 \\ 0 & 0 & 1/5 \end{array}\right]$$

Finalmente, podemos plantear nuestro sistema de ecuaciones lineales a partir de la matriz escalonada reducida por filas que obtuvimos

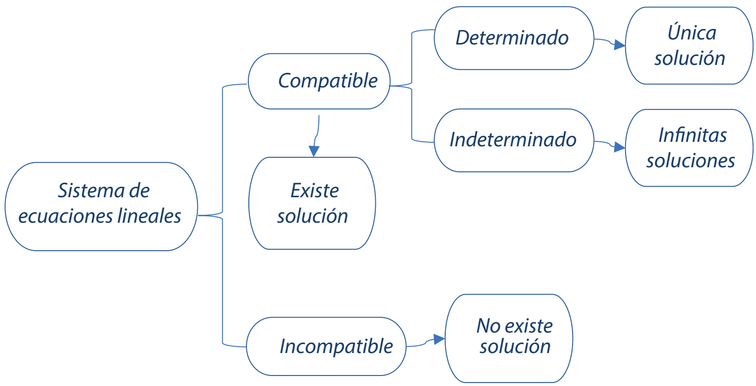
$$\begin{cases} x = -3/5 \\ y = 4/5 \\ 0 = 1/5 \end{cases}$$

Como puede notarse hemos llegado a una igualdad que denominaremos como *absurda*, porque obviamente 0 no es igual a 1/5. Entonces diremos que si aplicamos operaciones elementales sobre la matriz ampliada asociada al sistema de ecuaciones y llegamos a un absurdo el **sistema es incompatible** (**o inconsistente**), es decir, no tiene solución.

En conclusión, el sistema $\begin{cases} 2x\text{-}y = -2 \\ x\text{-}3y = -3 \\ \text{-}x + 2y = -5 \end{cases}$ no tiene solución, lo que significa que no existe ningún par ordenado *(x, y)* que satisfaga las tres ecuaciones a la vez.

Con base en los ejemplos que hemos venido trabajando podemos plantear el siguiente esquema (figura 2.1) que puede servir de referencia para clasificar las posibles soluciones que tiene un sistema de ecuaciones lineales.

Figura 2.1.
Clasificación de los sistemas de ecuaciones lineales



Ejercicio 2.4

Analicemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 2x + y + 2z = 1 \\ 2x\text{-}2y + 3z = -5 \\ 2x + 4y + z = 7 \end{cases}$$

Solución

Este sistema de ecuaciones lineales es cuadrado (mismo número de ecuaciones y de incógnitas). Por lo tanto, en principio podemos pensar en aplicar la Regla de Cramer, pero como ya mencionamos esta regla solo funciona si el determinante de la matriz de coeficientes es distinto de cero, y el lector podrá demostrar fácilmente usando la Regla de Sarrus que $\Delta A = 0$:

$$\Delta A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & \text{-}2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Así pues, en este sistema de ecuaciones lineales a pesar de ser cuadrado, no es posible resolverlo usando la Regla de Cramer, lo cual ya nos proporciona una información respecto al sistema: **no es compatible determinado**. Al resolverlo solo tendremos dos opciones, si es compatible será indeterminado (infinitas soluciones) o en caso contrario será incompatible (no tiene solución alguna). Cuando nos encontremos con este tipo de ejercicios la manera de abordarlos será usando el método de Gauss-Jordan:

$$\begin{cases} 2x + y + 2z = 1 \\ 2x\text{-}2y + 3z = -5 \\ 2x + 4y + z = 7 \end{cases}$$

Armamos la matriz ampliada:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 3 & -5 \\ 2 & 4 & 1 & 7 \end{array}\right]$$

El pivote de la primera fila lo convertimos en 1.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 3 & -5 \\ 2 & 4 & 1 & 7 \end{array}\right] \quad f_1 \quad \rightarrow \quad \frac{1}{2}\cdot f_1 \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1/2 & 1 & 1/2 \\ 2 & -2 & 3 & -5 \\ 2 & 4 & 1 & 7 \end{array}\right]$$

Los elementos que estén en la columna del pivote de la primera fila deben volverse ceros.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1/2 & 1 & 1/2 \\ 2 & -2 & 3 & -5 \\ 2 & 4 & 1 & 7 \end{array}\right] \quad f_2 \quad \rightarrow \quad -2\cdot f_1 + f_2 \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1/2 & 1 & 1/2 \\ 0 & -3 & 1 & -6 \\ 2 & 4 & 1 & 7 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1/2 & 1 & 1/2 \\ 0 & -3 & 1 & -6 \\ 2 & 4 & 1 & 7 \end{array}\right] \quad f_3 \quad \rightarrow \quad -2\cdot f_1 + f_3 \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1/2 & 1 & 1/2 \\ 0 & -3 & 1 & -6 \\ 0 & 3 & -1 & 6 \end{array}\right]$$

Cambiamos de pivote, ahora centramos nuestra atención en el pivote de la segunda fila, y lo convertimos en 1.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1/2 & 1 & 1/2 \\ 0 & -3 & 1 & -6 \\ 0 & 3 & -1 & 6 \end{array}\right] \quad f_2 \quad \rightarrow \quad -\frac{1}{3}\cdot f_2 \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1/2 & 1 & 1/2 \\ 0 & 1 & -1/3 & 2 \\ 0 & 3 & -1 & 6 \end{array}\right]$$

Anulamos los elementos que están en la columna del pivote de la segunda fila:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1/2 & 1 & 1/2 \\ 0 & 1 & -1/3 & 2 \\ 0 & 3 & -1 & 6 \end{array}\right] \quad f_1 \quad \rightarrow \quad -\frac{1}{2}\cdot f_2 + f_1 \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 7/6 & -1/2 \\ 0 & 1 & -1/3 & 2 \\ 0 & 3 & -1 & 6 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 7/6 & -1/2 \\ 0 & 1 & -1/3 & 2 \\ 0 & 3 & -1 & 6 \end{array}\right] \quad f_3 \quad \rightarrow \quad -3\cdot f_2 + f_3 \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 7/6 & -1/2 \\ 0 & 1 & -1/3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Como ya hemos llegado a una matriz escalonada reducida por filas, escribamos nuestro nuevo sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x + \frac{7}{6}z = -\frac{1}{2} \\ y - \frac{1}{3}z = 2 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Como puede verse la última ecuación representa una igualdad que siempre es verdadera, este tipo de igualdad se conoce como una *identidad*, las identidades no proporcionan información, pero tampoco contradicen las otras igualdades, por lo tanto, podemos prescindir de ellas. Nuestro sistema quedaría así:

$$\begin{cases} x + \frac{7}{6}z = -\frac{1}{2} \\ y - \frac{1}{3}z = 2 \end{cases}$$

El nuevo sistema que encontramos no es cuadrado, tenemos más incógnitas (3) que ecuaciones (2), por lo tanto, dejamos una variable libre (la z) y nuestro sistema está resuelto:

$$\begin{cases} x = -\frac{1}{2} - \frac{7}{6}z \\ y = 2 + \frac{1}{3}z \\ z \in R \end{cases}$$

Como podemos notar, el sistema de ecuaciones lineales es compatible indeterminado, es decir, tiene infinitas soluciones.

El ejercicio que acabamos de analizar nos demuestra que no todos los sistemas cuadrados siempre son compatibles determinados.

Estudiemos otros problemas aplicados a la actividad agropecuaria.

Problema 2.12

Las granjas Mi Primavera y Cayambe compraron, *cerdos, vacas* y *patos*. Mi Primavera compro 4 *cerdos*, una *vaca* y 10 *patos* en total pagó \$1050. La granja Cayambe compró 3 *cerdos*, una *vaca* y 7 *patos* y pagó \$920. ¿Cuál es el costo por *cerdo* y *vaca*? ¿Cuánto pagará la granja El Encanto por 2 *cerdos*, una *vaca* y un *pato*? Considere el precio por *pato* igual a: \$6 y \$7.

Solución

Procedemos a definir las incógnitas del sistema de ecuaciones cuya solución debe responder a las preguntas. ¿Cuál es el costo por *cerdo* y *vaca*? ¿Cuánto pagará la granja El Encanto por 2 *cerdos*, una *vaca* y un *pato*?

$$c: Costo\ por\ cerdo.$$

$$v: Costo\ por\ vaca.$$

$$p: Costo\ por\ pato\ fijado\ en\ \$6\ y\ \$7.$$

Definidas las variables y con la interpretación del enunciado del problema procedemos a plantear el sistema de ecuaciones, como se muestra a continuación:

$$\begin{cases} 4c + 1v + 10p = 1050 \\ 3c + 1v + 7p = 920 \end{cases}$$

Observamos que hemos formado un sistema de ecuaciones no cuadrado de dos ecuaciones y tres incógnitas, este sistema no podemos resolverlo mediante el uso de la Regla de Cramer (la matriz no es cuadrada). Sin embargo, podemos utilizar el método de Gauss-Jordan, para ello usaremos las operaciones elementales por filas, como se muestra a continuación:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 1 & 10 & 1050 \\ 3 & 1 & 7 & 920 \end{array}\right] \quad f_1 \to \frac{1}{4} f_1 \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1/4 & 5/2 & 525/2 \\ 3 & 1 & 7 & 920 \end{array}\right]$$

$$f_2 \to f_2\text{-}3f_1 \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1/4 & 5/2 & 525/2 \\ 0 & 1/4 & -1/2 & 265/2 \end{array}\right] \quad f_2 \to 4f_2 \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1/4 & 5/2 & 525/2 \\ 0 & 1 & -2 & 530 \end{array}\right]$$

$$f_1 \to f_1\text{-}\frac{1}{4} f_2 \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 130 \\ 0 & 1 & -2 & 530 \end{array}\right]$$

De la ecuación 1 y 2 hemos encontrado:

$$c + 3p = 130 \qquad v\text{-}2p = 530$$

Ambas ecuaciones dependen de p (*patos*), este sistema matemáticamente tiene infinitas soluciones. Sin embargo, en el contexto del problema se menciona que el precio por *pato* es de: \$6 y \$7, esto define a la variable libre $p = \$6$ y $p = \$7$.

Con el valor de $p = \$6$, el costo por *cerdo* es: \$112, el precio por *vaca* es: \$542 y la granja El Encanto pagaría por: 2 *cerdos*, una *vaca* y un *pato*, la cantidad de \$772.

Con el valor de $p = \$7$, el costo por *cerdo* es: \$109 y el precio por *vaca* es: \$544 y la granja El Encanto pagaría por: 2 *cerdos*, una *vaca* y un *pato*, la cantidad de \$769.

Problema 2.13

Una granja tiene tres razas de vacas lecheras: *Holstein, Pardo Suizo* y *Jersey*. Si la granja vendió en total 60 animales. Además, la venta de vacas de la raza *Holstein* fue el doble de la raza *Pardo Suizo*. ¿Cuántas *vacas* de la raza *Holstein* y *Pardo Suizo* vendió la granja? Considere que la granja comercializó 9 *vacas de la raza Jersey*.

Solución

Procedemos a definir las incógnitas del sistema de ecuaciones las cuales deben responder a la pregunta. ¿Cuántas *vacas de la raza Holstein y Pardo Suizo* vendió la granja?

$$h: cantidad\ de\ vacas\ Holstein\ vendidas$$

$$p: cantidad\ de\ vacas\ Pardo\ Suizo\ vendidas.$$

$$j: cantidad\ de\ vacas\ Jersey\ vendidas\ fijada\ en\ 9$$

Definidas las tres variables $h, p\ y\ j$ y con la interpretación del enunciado del problema procedemos a plantear el sistema de ecuaciones, el cual resulta:

$$\begin{cases} h + p + j = \quad 60 \\ \qquad h = 2p \end{cases}$$

Observemos que hemos formado un sistema no cuadrado que no podríamos resolver usando la Regla de Cramer (la matriz de coeficientes es no cuadrada). Sin embargo, podemos usar el método de Gauss-Jordan.

Así la matriz aumentada resulta:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 60 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Ahora mediante operaciones elementales por fila resulta:

$$f_2 \to f_2\text{-}f_1 \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 60 \\ 0 & -3 & -1 & -60 \end{array}\right] \; f_2 \to -\tfrac{1}{3} f_2 \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 60 \\ 0 & 1 & 1/3 & 20 \end{array}\right]$$

$$f_1 \to f_1\text{-}f_2 \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2/3 & 40 \\ 0 & 1 & 1/3 & 20 \end{array}\right]$$

De las ecuaciones 1 y 2 hemos encontrado:

$$h + \frac{2}{3}j = 40; \quad p + \frac{1}{3}j = 20$$

Ambas ecuaciones dependen de j (*Jersey*), este sistema matemáticamente tiene infinitas soluciones. Sin embargo, en el contexto del problema se menciona que la cantidad de *vacas* de la raza *Jersey* vendidas es de: 9 unidades, esto define a la variable libre $j = 9$, es decir:

Con el valor de $j = 9$, la cantidad de vacas de la raza *Holstein* es de 34 y la cantidad de *vacas* vendidas de la raza *Pardo Suizo* es: 17.

Método de Gauss-Jordan para hallar la inversa de una matriz

En el apartado 1.4.2 estudiamos cómo calcular la inversa de una matriz por el método de la adjunta, veamos ahora que también podemos aplicar el método de Gauss-Jordan, tal como lo veníamos haciendo con los sistemas de ecuaciones lineales para hallar la inversa de una matriz (Nuñez *et al.*, 2019).

Ejercicio 2.5

Calcule la inversa de la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$.

Recordemos que una matriz tiene inversa si su determinante es distinto de cero. Por ello, antes de aplicar el método de Gauss-Jordan calculemos el determinante de A. Esto podemos hacerlo fácilmente usando el método de Sarrus y dejamos al lector la tarea de verificar este resultando:

$$det[A] = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 26$$

Como el determinante de A es distinto de cero sabemos que A tiene inversa. Sigamos el método de Gauss-Jordan para hallar la inversa de A.

1. El primer paso en construir una matriz ampliada, donde colocaremos la matriz A del lado izquierdo y la matriz identidad del lado derecho:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

2. Ahora vamos a aplicar el método de Gauss-Jordan de la misma forma que lo hicimos con los sistemas de ecuaciones lineales. Recordemos que el primer paso era convertir el pivote de la primera fila en 1, pero como ya es 1, pasamos al siguiente paso que consiste en anular los elementos que están en la columna del pivote de la primera fila.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] f_2 \;\rightarrow\; -3\cdot f_1 + f_2 \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & -7 & -3 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & -7 & -3 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] f_3 \;\rightarrow\; 1\cdot f_1 + f_3 \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & -7 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

3. Ahora vamos a cambiar de pivote, y centramos la atención en el pivote de la segunda fila, que debemos convertir en 1.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & -7 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] f_2 \;\rightarrow\; -\frac{1}{8}\cdot f_2 \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 7/8 & 3/8 & -1/8 & 0 \\ 0 & 6 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

4. Repetimos el segundo paso, anulamos los elementos de la columna donde se encuentra el pivote de la fila 2.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 7/8 & 3/8 & -1/8 & 0 \\ 0 & 6 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] f_1 \rightarrow -3\cdot f_2 + f_1 \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3/8 & -1/8 & 3/8 & 0 \\ 0 & 1 & 7/8 & 3/8 & -1/8 & 0 \\ 0 & 6 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3/8 & -1/8 & 3/8 & 0 \\ 0 & 1 & 7/8 & 3/8 & -1/8 & 0 \\ 0 & 6 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] f_3 \rightarrow -6\, f_2 + f_3 \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3/8 & -1/8 & 3/8 & 0 \\ 0 & 1 & 7/8 & 3/8 & -1/8 & 0 \\ 0 & 0 & -13/4 & -5/4 & 3/4 & 1 \end{array}\right]$$

5. Ahora pasamos al pivote de la tercera fila y lo convertimos en 1.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3/8 & -1/8 & 3/8 & 0 \\ 0 & 1 & 7/8 & 3/8 & -1/8 & 0 \\ 0 & 0 & -13/4 & -5/4 & 3/4 & 1 \end{array}\right] \quad f_3 \rightarrow -\frac{4}{13} \cdot f_3 \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3/8 & -1/8 & 3/8 & 0 \\ 0 & 1 & 7/8 & 3/8 & -1/8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5/13 & -3/13 & -4/13 \end{array}\right]$$

6. Del mismo modo que antes, anulamos los elementos que están en la columna del pivote de la tercera fila.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3/8 & -1/8 & 3/8 & 0 \\ 0 & 1 & 7/8 & 3/8 & -1/8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5/13 & -3/13 & -4/13 \end{array}\right]$$

$$f_1 \rightarrow -\frac{3}{8} f_3 + f_1 \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -7/26 & 6/13 & 3/26 \\ 0 & 1 & 7/8 & 3/8 & -1/8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5/13 & -3/13 & -4/13 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -7/26 & 6/13 & 3/26 \\ 0 & 1 & 7/8 & 3/8 & -1/8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5/13 & -3/13 & -4/13 \end{array}\right]$$

$$f_2 \rightarrow -\frac{7}{8} f_3 + f_2 \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -7/26 & 6/13 & 3/26 \\ 0 & 1 & 0 & 1/26 & 1/13 & 7/26 \\ 0 & 0 & 1 & 5/13 & -3/13 & -4/13 \end{array}\right]$$

Cuando seguimos el método de Gauss-Jordan para hallar la inversa de una matriz cuyo determinante es distinto de cero, siempre llegaremos a la matriz identidad del lado izquierdo de la matriz ampliada, y el resultado que encontramos a la derecha será justamente la matriz inversa que estamos buscando. Por lo tanto, la inversa de la matriz A viene dada por:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -7/26 & 6/13 & 3/26 \\ 1/26 & 1/13 & 7/26 \\ 5/13 & -3/13 & -4/13 \end{bmatrix}$$

Sistemas de ecuaciones lineales y la matriz inversa

Ahora que conocemos qué es y cómo se halla la inversa de una matriz, bien sea por el método de la adjunta o por el método de Gauss-Jordan, vamos a utilizarla para resolver un sistema de ecuaciones lineales cuadrado.

Partamos de la siguiente idea:

"Todo sistema de ecuaciones lineales cuadrado tiene asociado una ecuación matricial".

Entendamos esta proposición con un ejemplo.

Ejemplo 2.8

Para el sistema $\begin{cases} x + 3y + 3z = -2 \\ 3x + y + 2z = -5 \\ -x + 3y - z = 0 \end{cases}$ podemos identificar tres matrices que están implícitas en él:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & -1 \end{bmatrix} \textit{ Matriz de coeficientes}$$

$$B = \begin{bmatrix} -2 \\ -5 \\ 0 \end{bmatrix} \textit{ Matriz de términos independientes}$$

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \textit{ Matriz de las variables (incógnitas)}$$

Si ahora multiplicamos la matriz *A* por la matriz *X* resulta:

$$A \cdot X = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

$$A \cdot X = \begin{bmatrix} x + 3y + 3z \\ 3x + y + 2z \\ -x + 3y - z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -5 \\ 0 \end{bmatrix} = B$$

Luego, $A \cdot X = B$, esta es la ecuación matricial asociada al sistema. Sin embargo, para resolver el sistema lo que necesitamos conocer es la matriz de las variables *X*. Entonces, procedemos a despejar la matriz *X* de la ecuación matricial asociada:

$$A \cdot X = B$$

Lo primero que debemos tener en cuenta es que la matriz *A* debe ser invertible para poder despejar *X*, lo que significa que su determinante debe ser diferente de cero, y ya vimos antes que si esto ocurre en un sistema cuadrado entonces podemos asegurar que el sistema es compatible determinado. Resumimos con el siguiente enunciado:

"El método de la matriz inversa solo funciona para resolver sistemas de ecuaciones cuadrados que sean compatibles determinados".

Así pues, el método de la inversa es una alternativa a la Regla de Cramer al momento de resolver un sistema de ecuaciones.

Procedamos a despejar la matriz de las variables de la ecuación matricial:

$A \cdot X = B$

$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B$ *Multiplicamos ambos lados por la izquierda por la inversa de A*

$(A^{-1} \cdot A) \cdot X = A^{-1} \cdot B$ *Asociamos la inversa de A con A.*

$I \cdot X = A^{-1} \cdot B$ *Por definición de matriz inversa este producto es la matriz identidad.*

$X = A^{-1} \cdot B$ *La identidad multiplicada por cualquier matriz resulta la misma matriz.*

Por lo tanto, tenemos la solución a nuestra ecuación matricial: $X = A^{-1} \cdot B$

Teorema 2.1

Sea $A \cdot X = B$ la ecuación matricial asociada a un sistema de ecuaciones lineales cuadrado compatible determinado, es decir, $det[A] \neq 0$. Entonces la solución del sistema viene dada por $X = A^{-1} \cdot B$.

A partir de lo anterior, resolvamos el sistema de ecuaciones planteado inicialmente.

Ejercicio 2.6

Resuelva el sistema de ecuaciones $\begin{cases} x + 3y + 3z = -2 \\ 3x + y + 2z = -5 \\ -x + 3y - z = 0 \end{cases}$

Solución

$$\begin{cases} x + 3y + 3z = -2 \\ 3x + y + 2z = -5 \\ -x + 3y - z = 0 \end{cases}$$

a. Lo primero que hacemos es identificar las tres matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & -1 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} -2 \\ -5 \\ 0 \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

b. Luego, calculamos la matriz inversa de *A* utilizando el método que prefiramos, en este ejemplo podemos ver que la matriz de coeficientes es la misma matriz que utilizamos antes para hallar su inversa, así que ya conocemos A^{-1}.

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{-7}{26} & \frac{6}{13} & \frac{3}{26} \\ \frac{1}{26} & \frac{1}{13} & \frac{7}{26} \\ \frac{5}{13} & \frac{-3}{13} & \frac{4}{13} \end{bmatrix}$$

c. Por último, utilizamos la solución a la ecuación matricial asociada al sistema para encontrar los valores de las incógnitas:

$$X = A^{-1} \cdot B$$

$$X = A^{-1} \cdot B = \begin{bmatrix} \frac{-7}{26} & \frac{6}{13} & \frac{3}{26} \\ \frac{1}{26} & \frac{1}{13} & \frac{7}{26} \\ \frac{5}{13} & \frac{-3}{13} & \frac{-4}{13} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ -5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} \frac{-23}{13} \\ \frac{-6}{13} \\ \frac{5}{13} \end{bmatrix}$$

Luego,

$$x = \frac{-23}{13}\,;\quad y = \frac{-6}{13}\,;\quad z = \frac{5}{13}$$

Veamos un par de problemas.

Problema 2.14

Un comerciante vendió 424 kg de *queso* entre *cheddar* y *mozzarella.* Si el costo por kg de cada *queso* fue de: \$9 y \$13 respectivamente y la venta total en dólares fue de: \$5000. ¿Cuántos kilogramos de cada tipo de *queso* vendió el comerciante?

Solución

Procedemos a definir las incógnitas del sistema de ecuaciones las cuales deben responder a la interrogante ¿Cuántos kilogramos de cada tipo de *queso* vendió el comerciante?

$$c\text{: } Kilogramos\ de\ queso\ cheedar\ vendidos.$$

$$m\text{: } Kilogramos\ de\ queso\ mozarrella\ vendidos.$$

Definidas las dos variables y con la interpretación del enunciado del problema procedemos a plantear el sistema de ecuaciones.

$$\begin{cases} c + m = 424 \\ 9c + 13m = 5000 \end{cases}$$

Resolvamos este sistema utilizando la inversa de la matriz de coeficientes.

Llamaremos A la matriz de coeficientes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 9 & 13 \end{bmatrix}$$

Procedemos a calcular A^{-1} utilizando el método de la matriz adjunta cuya fórmula conocemos:

$$A^{-1} = \frac{1}{det\ [A]}\ adj[A^t]$$

Calculamos la matriz adjunta de A.

Los cofactores de A resultan:

$$C_{11} = (-1)^{1+1}|13| = 13 \qquad C_{12} = (-1)^{1+2}|9| = -9$$

$$C_{21} = (-1)^{2+1}|11| = -1 \qquad C_{22} = (-1)^{2+2}|9| = 1$$

Luego, la matriz adjunta viene dada por:

$$adj\ [A] = \begin{bmatrix} 13 & -9 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Ahora la matriz $adjA^t$ y resulta:

$$adj\ [A^t]\ = \begin{bmatrix} 13 & -1 \\ -9 & 1 \end{bmatrix}$$

Procedemos a calcular el determinante de la matriz *A*

$$det[A] = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 9 & 13 \end{vmatrix} = 13 - 9 = 4$$

La inversa de la matriz A será:

$$A^{-1} = \frac{1}{4}.\begin{bmatrix} 13 & -1 \\ -9 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13/4 & -1/4 \\ -9/4 & 1/4 \end{bmatrix}$$

Finalmente $X = A^{-1}B$ resulta:

$$\begin{bmatrix} 13/4 & -1/4 \\ -9/4 & 1/4 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} 424 \\ 5000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 128 \\ 296 \end{bmatrix}$$

Es decir, el comerciante vendió 128 kg de *queso cheddar* y 296 kg de *queso mozzarella*.

Problema 2.15

Una granja tiene entre *caballos*, *cerdos* y *vacas* 400 animales. Si la cantidad de *caballos* es igual al doble de la cantidad de *vacas* y la cantidad de *vacas* es el triple de la cantidad de *cerdos*. ¿Cuántos *caballos*, *cerdos* y *vacas* hay en la granja?

Solución:

Procedemos a definir las incógnitas del sistema de ecuaciones las cuales deben responder a la interrogante ¿Cuántos *caballos, cerdos* y *vacas* tiene la granja?

$$ca: cantidad\ de\ caballos\ que\ hay\ en\ la\ granja.$$

$$ce: cantidad\ de\ cerdos\ que\ hay\ en\ la\ granja.$$

$$v: cantidada\ de\ vacas\ que\ hay\ en\ la\ granja.$$

Definidas las tres incógnitas $ca, ce\ y\ v$ y con la interpretación del enunciado del problema procedemos a plantear el sistema de ecuaciones, el cual resulta:

$$\begin{cases} ca + ce + v = \quad 400 \\ \qquad ca = 2v \\ \qquad v = 3ce \end{cases}$$

Reordenando el sistema resulta:

$$\begin{cases} ca + ce + v = \quad 400 \\ \quad ca\text{-}2v = 0 \\ \text{-}3ce + v = 0 \end{cases}$$

La matriz de coeficientes resulta:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

En este caso procedamos a calcular A^{-1} con el método de Gauss-Jordan, como se muestra a continuación:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Mediante las operaciones elementales por fila llevaremos la matriz *A*, a la matriz identidad, es decir:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \; f_2 \rightarrow f_2\text{-}f_1 \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$f_2 \rightarrow \text{-}1f_2 \; \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] f_3 \rightarrow f_3 + 3f_2 \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 3 & -3 & 1 \end{array}\right]$$

$$f_1 \rightarrow f_1\text{-}f_2 \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 3 & -3 & 1 \end{array}\right]$$

$$f_3 \rightarrow \frac{1}{10} f_3 \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3/10 & -3/10 & 1/10 \end{array}\right]$$

$$f_2 \rightarrow f_2\text{-}3f_3 \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1/10 & -1/10 & -3/10 \\ 0 & 0 & 1 & 3/10 & -3/10 & 1/10 \end{array}\right]$$

$$f_1 \rightarrow f_1 + 2f_3 \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 6/10 & 2/5 & 2/10 \\ 0 & 1 & 0 & 1/10 & -1/10 & -3/10 \\ 0 & 0 & 1 & 3/10 & -3/10 & 1/10 \end{array}\right]$$

Ahora A^{-1} resulta:

$$A^{-1} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3/5 & 2/5 & 1/5 \\ 0 & 1 & 0 & 1/10 & -1/10 & -3/10 \\ 0 & 0 & 1 & 3/10 & -3/10 & 1/10 \end{array}\right]$$

Finalmente $X = A^{-1}B$ resulta:

$$\begin{bmatrix} 3/5 & 2/5 & 1/5 \\ 1/10 & -1/10 & 3/10 \\ 3/10 & -3/10 & 1/10 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 400 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 240 \\ 40 \\ 120 \end{bmatrix}$$

Es decir, en la granja hay 240 *caballos*, 40 *cerdos* y 120 *vacas*.

Ejercicios y problemas propuestos

Ejercicios propuestos

1. Resuelva los siguientes sistemas de ecuaciones usando la Regla de Cramer.

a. $\begin{cases} 3x + 2y = -5 \\ 4x\text{-}2y = 1 \end{cases}$

b. $\begin{cases} 2y = -5 \\ 4x\text{-}y = 0 \end{cases}$

c. $\begin{cases} x\text{-}3y + 2z = 2 \\ 5x + 4y + 6z = -5 \\ \text{-}x + 2y\text{-}z = -2 \end{cases}$

d. $\begin{cases} 2x + 4y\text{-}z + 3 = 0 \\ x + y\text{-}z + 5 = 0 \\ 3x\text{-}2y\text{-}z\text{-}1 = 0 \end{cases}$

e. $\begin{cases} x + y + z\text{-}w = 1 \\ x + 2y + z = -1 \\ 2x\text{-}y + z = -2 \\ x\text{-}2y\text{-}z = 2 \end{cases}$

f. $\begin{cases} x\text{-}2z = 0 \\ x + 4y + z + 7 = 0 \\ x\text{-}y + z = -2 \end{cases}$

2. Resuelva los siguientes sistemas de ecuaciones usando el método de la matriz inversa.

a. $\begin{cases} x + y = -5 \\ 3x\text{-}2y = 1 \end{cases}$

b. $\begin{cases} x\text{-}y = 2 \\ x\text{-}2y = -1 \end{cases}$

c. $\begin{cases} x + 2z = 0 \\ x + 4y + z = -7 \\ \text{-}x + 2y = -2 \end{cases}$

d. $\begin{cases} \text{-}x\text{-}3y + 2z\text{-}2 = 0 \\ 5x + 5y\text{-}3z + 5 = 0 \\ x + 2y\text{-}z = -2 \end{cases}$

e. $\begin{cases} \text{-}x + 2y\text{-}w = 3 \\ x + w = \text{-}1 \\ \text{-}y + z = 5 \\ x + y\text{-}z = 2 \end{cases}$

f. $\begin{cases} x + y\text{-}2z = 3 \\ \text{-}y + z = -5 \\ \text{-}x + y\text{-}z = -1 \end{cases}$

3. Resuelva los siguientes sistemas de ecuaciones usando el método de Gauss-Jordan.

a. $\begin{cases} x + 2y = 1 \\ x\text{-}y = -1 \end{cases}$

b. $\begin{cases} 2x + y = 1 \\ x + y = 3 \end{cases}$

c. $\begin{cases} y\text{-}x = -5 \\ \text{-}y = 2 \end{cases}$

d. $\begin{cases} x + 2y = -2 \\ 3x\text{-}y = 4 \end{cases}$

e. $\begin{cases} \text{-}x\text{-}y + z = 1 \\ x + z = -2 \\ \text{-}x\text{-}z = -3 \end{cases}$

f. $\begin{cases} \text{-}x\text{-}y + 2z = 2 \\ \text{-}2x + y\text{-}3z = -3 \\ x + 2y = -1 \end{cases}$

g. $\begin{cases} x + z\text{-}w = 2 \\ 2y + z + w = 1 \\ 2x\text{-}y = 2 \\ x + y\text{-}z = -2 \end{cases}$

h. $\begin{cases} x + y + z\text{-}w = 0 \\ x\text{-}y\text{-}z + w = -2 \\ x\text{-}y + z\text{-}2w = 1 \\ x + 2y\text{-}z\text{-}w = 2 \end{cases}$

4. Resuelva los siguientes sistemas de ecuaciones usando el método que considere conveniente.

a. $\begin{cases} x + 2y = 1 \\ x\text{-}y = -1 \\ x + 5y = 3 \end{cases}$

b. $\begin{cases} 2x + y\text{-}z = 1 \\ x + y + z = 3 \end{cases}$

c. $\begin{cases} 4y\text{-}2x = -5 \\ 2x\text{-}y = 2 \end{cases}$

d. $\begin{cases} x + 2y = -2 \\ 3x\text{-}y = 4 \\ x\text{-}y = 0 \\ 4x + y = 2 \end{cases}$

e. $\begin{cases} x\text{-}y + z = 1 \\ x + y\text{-}z = 0 \\ \text{-}x + y\text{-}z = -3 \\ x + y\text{-}z = 2 \end{cases}$

f. $\begin{cases} x + y\text{-}2z = 3 \\ x\text{-}y + z = -5 \\ 3x + y\text{-}3z = 1 \\ \text{-}x + y\text{-}z = -1 \end{cases}$

g. $\begin{cases} x + y\text{-}2z = 3 \\ x + y\text{-}5z = 7 \\ x + y\text{-}z = 1 \end{cases}$

h. $\begin{cases} x\text{-}y + 2z = 2 \\ \text{-}2x + y\text{-}3z = -3 \\ x\text{-}2y = -1 \\ \text{-}x\text{-}z = -1 \end{cases}$

i. $\begin{cases} x + z\text{-}w = 2 \\ y + z + w = -1 \\ 2x\text{-}y = 0 \\ x + y = 3 \\ \text{-}x + y\text{-}2z = 2 \end{cases}$

j. $\begin{cases} \text{-}x + y + z\text{-}w = 1 \\ x\text{-}y\text{-}z + w = -1 \\ x\text{-}y + z\text{-}2w = 1 \\ x + 2y\text{-}z\text{-}w = 2 \end{cases}$

Problemas propuestos

1. Juan y Andrés necesitan transportar su cosecha de hortalizas hasta una feria agroecológica; ambos van a una misma cooperativa de camionetas. Las camionetas cobran una tarifa diaria más una tarifa por la distancia recorrida en kilómetros. Juan pagó \$260 por dos días y 100 kilómetros. Andrés pagó \$511 por tres días y 250 kilómetros. ¿Cuál es la tarifa diaria de una camioneta y cuál es la tarifa por kilómetro?
2. En una feria agroecológica María y Luis vendieron 12 animales entre cuyes y conejos. El precio por cada animal fue de \$5 y \$6 respectivamente, además, el ingreso total fue de \$62, determinar cuántos cuyes y conejos vendieron María y Luís.
3. Luisa y Nancy deben pagar una deuda que suma \$870 a un proveedor de frutas; si el doble de lo que debe Luisa menos lo que debe Nancy asciende a \$420. ¿Cuál es la deuda de Luisa y Nancy?
4. Lisbeth pagó por 3 lechugas y 10 tomates \$2,5. Cristina pagó por 5 lechugas y 3 tomates \$2,80 ¿Cuánto cuesta cada lechuga y cada tomate?
5. Marlon es distribuidor de pavos, durante el lunes, martes y miércoles vendió en total 1800 libras. El lunes vendió 12 libras más que el martes y el miércoles vendió 20 libras más que el lunes. ¿Cuántas libras de pavos vendió cada día?
6. El perímetro de un terreno rectangular es de 1225 m, si el largo es dos tercios del ancho. Calcule:
   a. Las dimensiones del terrero
   b. El área en m^2
   c. Cuántas plantas de aguacate se podría cultivar si cada una requiere de un área de 49 m^2
7. El perímetro de una cisterna de sección rectangular es de 16 m. Si el largo es el doble del ancho, determine cuánto mide el largo y ancho; la altura si el volumen es de 30 m^3 y la cantidad de tanqueros de agua necesarios para llenar la cisterna si cada camión tiene una capacidad de 3 m^3.

8. María dispone de una granja y desea invertir \$12500 en la compra de cerdas, cabras y vacas. La inversión en la compra de las cerdas es el doble de lo que invierte en la adquisición de cabras y vacas juntos. Pasado un año el costo por cerda y cabra se ha revalorizado un 3 % y 5 % respectivamente, mientras que el costo por vaca ha disminuido un 4 %; como resultado de esto María ha obtenido un ingreso de \$450. Determine cuanto fue la inversión que hizo María en la compra de las cerdas, cabras y vacas.
9. Juan, Luis y Johanna fueron a una feria agroecológica. Juan compró 3 kg de culantro, 2 kg de perejil y 1 kg de apio en total pagó \$4,8. Luís compró 2 kg de culantro, 3 kg perejil y 2 kg de apio y canceló \$5,8. Johanna compró 3 kg de culantro, 1 kg perejil y 2 kg de apio en total pagó \$4,5. ¿Cuál es el precio por kg de cada producto?
10. Una fábrica de lácteos envasa leche en fundas de 250 ml, 500 ml y 1000 ml. Cierto día envasó en total 80 fundas, además ese día se dieron cuenta que había 10 fundas más del tamaño pequeño que del mediano. Sabiendo que el costo por litro es de \$0,90 y que el ingreso por la venta de la leche de ese día fue de \$45. ¿Cuántas fundas de leche se envasaron por cada tamaño?
11. Un pequeño comerciante adquirió 60 kg de carne de cerdo, res y borrego invirtiendo \$290, el precio por kg de carne de cerdo es de \$5, el kg de res \$4,5 y el kg de borrego \$6, además, la cantidad de kg de carne de cerdo comprada fue igual a la cantidad de carne de res más el 50 % de carne de borrego. ¿Cuántos kg de carne de cerdo, de res y borrego compró el pequeño comerciante?
12. Una florícola vendió 500 tallos de rosas: Vendela, Freedom, Explorer y Blue mondial, si el precio por tallo de cada variedad es de \$1, \$0,90, \$1,50 y \$0,80 respectivamente y el total de ingreso fue de \$448. Además, la venta de la cantidad de tallos de la variedad Freedom fue el doble de la variedad Explorer y la comercialización de la cantidad de tallos de la variedad

Blue mondial fue el tripe de la Vendela más Freedom. Determine la cantidad de tallos vendidos por variedad de rosa.

13. Un productor quiere sembrar 100 kg de una mezcla forrajera entre gramíneas y leguminosas. Si la cantidad de leguminosas representa 1,85 veces más que gramíneas. Determine:
    a. La cantidad en kg de gramíneas y leguminosas que utilizará.
    b. Si las gramíneas son el pasto azul, bizon y tetralite y estos representan en porcentaje del 20 %, 10 % y 5 %, determine la cantidad en kg de cada gramínea que deberá usar.
14. En la granja Cayambe existe un recipiente cilíndrico para almacenamiento de agua. Si el perímetro es de 12,56 m. Además, la altura del recipiente es el doble del radio. Determine:
    a. El radio y altura del recipiente.
    b. El área del fondo del cilindro.
    c. El área de la superficie del cilindro.
    d. El volumen del recipiente.
    e. Peso del fluido si el tanque está lleno a la mitad y el líquido es agua, considere el peso específico del fluido 9810 N/m^3
15. La superficie de un terreno está representada por un trapecio isósceles y el perímetro es de 200 m, además los lados no paralelos miden cada uno 50 m.
    Determine:
    a. El lado largo y corto del terreno, si el lado largo es el doble del lado corto.
    b. El área del terreno.
    c. El costo de la parcela si el precio es 80\$/m^2