

Matrices y determinantes

En este capítulo trataremos sobre las matrices, sus operaciones, los determinantes y sus propiedades. Analizaremos algunos problemas relacionados con la actividad agropecuaria a fin de despertar en el lector la curiosidad para ahondar en estos contenidos y relacionarlos directamente con sus necesidades como futuro ingeniero agropecuario. Entre otros aspectos, entenderemos cómo las operaciones con matrices pueden ayudarnos a determinar: tallos de rosas vendidos, kilogramos de queso comercializados, ingreso o ganancia por la venta de hortalizas y cosecha en general, costo del producto por proveedor, entre otros. Mientras que con los determinantes veremos cómo hacer el cálculo de áreas de superficies.

Definición y clasificación de matrices

Comencemos por comprender **qué es una matriz**. Un primer acercamiento a las matrices podemos darlo desde una perspectiva muy intuitiva al definirla como un arreglo rectangular de elementos que organizaremos en filas y columnas (Hernández, 2018; Morales, 2019b).

Por ejemplo, digamos que tenemos tres tipos de productos agrícolas alimenticios (cereales, tubérculos y legumbres) y estos son producidos en toneladas al mes dentro de una provincia por cuatro empresas diferentes (AgroPua, AgroImplante, Agropecuaria S.A. y ServiAgro), haciendo uso de una matriz podemos organizar *cuántas toneladas de productos clasificados por tipo, se producen al mes por cada empresa*. Para ello, hacemos un arreglo rectangular (tabla 1) de la siguiente forma:

Tabla 1

Cantidad en toneladas de productos que cada empresa produce al mes

Tipo \ Empresa	AgroPua	AgroImplante	Agropecuaria S. A.	ServiAgro
Cereales	3,5	3,3	2,5	1,9
Tubérculos	8	7,5	6	5,2
Legumbres	1,5	1,2	0,8	0,7

Como podemos observar en la tabla 1, hemos organizado la información del contexto del problema en filas y columnas (tipo y empresa), donde cada elemento puede ser identificado plenamente según la fila y la columna en la que se encuentre. Por ejemplo, en la fila de los tubérculos y en la columna de la empresa AgroImplante se encuentra el número 7,5 que se interpreta como: *Se producen 7,5 toneladas de tubérculos al mes por la empresa AgroImplante.*

Para reflexionar: ¿Cuántas toneladas de cereales produce al mes la empresa ServiAgro?

La tabla 1 es un ejemplo de cómo podemos organizar información por medio de las matrices. Sin embargo, para operar con ellas eficientemente, especialmente si tenemos tablas tan grandes que requieren del uso de medios tecnológicos para trabajarlas, se acude a una notación más simple utilizando un lenguaje matemático que describimos a continuación:

Las matrices suelen representarse como:

$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \end{matrix} & \textit{fila 1} \\ \begin{matrix} a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \end{matrix} & \textit{fila 2} \\ \begin{matrix} \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \end{matrix} & \vdots \\ \begin{matrix} a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{matrix} & \textit{fila m} \end{matrix}$$

$\textit{Columna 1}$

$\textit{Columna 2}$

$\cdots$

$\textit{Columna n}$

En general, las matrices son representadas con letras mayúsculas, en este caso hemos utilizado la letra A para nombrar nuestra matriz genérica. Cada elemento de la matriz está identificado con dos subíndices que representan la fila y la columna donde están ubicados (en ese orden), así el elemento a_{21} es aquel cuya ubicación es la segunda fila y la primera columna. Además, el número de filas y de columnas que tiene una matriz se conoce como **tamaño u orden de la matriz**. Al conjunto de todas las matrices con elementos reales (números reales) y cuyo tamaño es $m \times n$ lo denotaremos como $M_{m \times n}(R)$, aunque siempre asumiremos que los elementos son números reales y escribiremos simplemente $M_{m \times n}$.

Con estas ideas podemos representar la tabla 1 por medio de una matriz que llamaremos P y la escribimos de la siguiente manera:

$$P = \begin{bmatrix} 3,5 & 3,3 & 2,5 & 1,9 \\ 8 & 7,5 & 6 & 5,2 \\ 1,5 & 1,2 & 0,8 & 0,7 \end{bmatrix}$$

En este caso decimos que el tamaño de la matriz P es de 3×4 , es decir, 3 filas y cuatro columnas. Note que estos números carecen de significado cuando no se proporciona información respecto a lo que representan las filas y las columnas. Sin embargo, al operar con ellas es más cómodo hacerlo utilizando esta notación, así que en adelante será común encontrarnos con ella para representar matrices.

Teniendo claro qué es una matriz, y cómo representarla con un lenguaje matemático, estamos preparados para conocer algunos **tipos de matrices** que han recibido un nombre específico por la distribución en la que se encuentran sus elementos (ver en detalle en Morales, 2019b; Castañeda *et al.*, 2020).

Digamos que queremos organizar la información de los tres tipos de producción agrícola, pero solo de la empresa AgroPua. Para ello, podemos escribir la matriz B :

$$B = \begin{matrix} \text{AgroPua} \\ \begin{bmatrix} 3,5 \\ 8 \\ 1,5 \end{bmatrix} \end{matrix} \begin{matrix} \text{Cereales} \\ \text{Tubérculos} \\ \text{Legumbres} \end{matrix}$$

Este tipo de matriz recibe el nombre de **matriz columna** ya que está formado por una sola columna independientemente del número de filas, y su tamaño es $m \times 1$. En general, estas matrices tienen la forma:

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{m1} \end{bmatrix}$$

Del mismo modo, podríamos organizar la cantidad de cereales que envía al mercado cada empresa construyendo una **matriz fila** como se muestra a continuación.

$$C = \begin{matrix} \begin{matrix} \text{AgroPua} \\ \text{AgroImplante} \\ \text{Agropecuaria S.A.} \\ \text{ServiAgro} \end{matrix} & \begin{bmatrix} 3,5 & 3,3 & 2,5 & 1,9 \end{bmatrix} \end{matrix} \text{Cereales.}$$

Esta matriz recibe este nombre porque está formada por una sola fila sin importar el número de columnas, su tamaño es $1 \times n$

La forma general de representarla es:

$$C = [c_{11} \quad c_{12} \quad \dots \quad c_{1n}]$$

Otra matriz muy utilizada es la **matriz cuadrada**, esta matriz tiene la característica de estar formada con una cantidad igual de filas y columnas. Por ejemplo, en el caso que estamos analizando podríamos dejar de considerar la empresa Agropecuaria S. A y así tendríamos una matriz formada a partir de la siguiente tabla:

Tabla 2

Cantidad en toneladas de productos que las empresas; AgroPua, AgroImplante y ServiAgro producen al mes

Tipo \ Empresa	AgroPua	AgroImplante	ServiAgro
Cereales	3,5	3,3	1,9
Tubérculos	8	7,5	5,2
Legumbres	1,5	1,2	0,7

En este caso podríamos representar los elementos de esta tabla como una matriz de tamaño 3×3 :

$$D = \begin{bmatrix} 3,5 & 3,3 & 1,9 \\ 8 & 7,5 & 5,2 \\ 1,5 & 1,2 & 0,7 \end{bmatrix}$$

Las matrices cuadradas reciben este nombre por su semejanza con un cuadrado y los elementos que están en la “diagonal principal del cuadrado” se conocen como **diagonal principal** de la matriz. Para la matriz D la diagonal principal la conforman los elementos ubicados en las posiciones a_{11} , a_{22} y a_{33} .

Existe además otro conjunto de matrices que podrían presentarse en algunos de los problemas venideros, por lo cual definiremos algunas de ellas sin ningún contexto:

La **matriz nula** es aquella en la que todos sus elementos son ceros.

EJEMPLO 1.1

Las siguientes son matrices nulas:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

En general, las matrices nulas suelen representarse con la letra O . Así para referirnos a todas las matrices de orden $m \times n$ y cuyos elementos sean números reales escribimos $O_{m \times n}(R)$.

La **matriz triangular superior** es una matriz cuadrada cuyos elementos por *debajo* de la diagonal principal son todos ceros.

EJEMPLO 1.2

A es una matriz triangular superior.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -8 \end{bmatrix}$$

La matriz A tiene resaltado en rojo los elementos de la diagonal principal, y como puede notarse, los elementos que están por debajo de ella son todos ceros.

Otros ejemplos pueden ser las matrices:

$$B = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & -3 \\ 0 & -3 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -8 \end{bmatrix}$$

Para reflexionar: ¿Una matriz cuadrada nula es triangular superior?

Una **matriz triangular inferior** por su parte es una matriz cuadrada que tiene todos los elementos por *encima* de la diagonal principal iguales a cero.

EJEMPLO 1.3

Las siguientes son algunos ejemplos de este tipo de matrices:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix}; C = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 0 & 0 \\ -3 & -9 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & -2 \end{bmatrix};$$

$$D = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & -9 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

Para reflexionar: *¿Puede una matriz cuadrada ser triangular superior e inferior a la vez?*

Una **matriz diagonal** es una matriz cuadrada cuyos elementos que están por encima y por debajo de la diagonal principal son todos ceros.

EJEMPLO 1.4

Algunos ejemplos serían las siguientes matrices:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}; C = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix};$$

$$D = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Para reflexionar: *¿Una matriz nula que sea cuadrada es diagonal?*

Si en una matriz diagonal los elementos de la diagonal principal son todos iguales entonces decimos que es una **matriz escalar**.

EJEMPLO 1.5

Las siguientes matrices son escalares:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}; C = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix};$$

$$D = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Para reflexionar: ¿Toda matriz escalar es diagonal? ¿Toda matriz diagonal es escalar?

En el caso particular donde el número que se repite en la matriz escalar es igual a uno, decimos que la **matriz es identidad**.

EJEMPLO 1.6

Algunos ejemplos son:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Para reflexionar: ¿Toda matriz escalar es identidad? ¿Toda matriz identidad es escalar?

La matriz identidad recibe este nombre porque funciona como un elemento neutro para el producto de matrices, es decir, si es posible multiplicar una matriz A por una matriz identidad, entonces obtendremos de nuevo la matriz A , veremos un ejemplo de esta situación cuando estudiemos la multiplicación de matrices.

Si tenemos una matriz A , de tamaño $m \times n$, es decir, con m filas y n columnas, podemos definir su **matriz traspuesta** al intercambiar las filas de A por sus columnas. En este caso, el tamaño de la matriz cambia, resultando una nueva matriz que denotaremos como A^t y cuyo tamaño será $n \times m$.

EJEMPLO 1.7

Sea la matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & 4 & 8 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix}$, al cambiar las filas por las columnas y viceversa obtenemos su traspuesta $A^t = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \\ -1 & 8 & -2 \end{bmatrix}$

También podemos encontrar la traspuesta de una matriz que no sea cuadrada.

EJEMPLO 1.8

Por ejemplo, Si $A = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$, entonces $A^t = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

Podríamos encontrarnos con una matriz cuadrada cuya traspuesta coincida con ella, en ese caso la llamaremos **matriz simétrica**

EJEMPLO 1.9

Si $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ podemos ver que al cambiar las filas por las columnas obtenemos la matriz

$$A^t = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \text{ que en efecto coincide con } A.$$

El siguiente es un ejemplo de una matriz 3×3 :

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & 8 \\ -1 & 8 & -2 \end{bmatrix} \quad B^t = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & 8 \\ -1 & 8 & -2 \end{bmatrix} \text{ luego } B = B^t$$

El lector habrá podido notar con los ejemplos anteriores que es fácil identificar una matriz simétrica centrando nuestra atención en la diagonal principal, ya que esta actúa como un “espejo” en la que los elementos que están por debajo de ella se “reflejan” en los que están sobre ella.

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & 8 \\ -1 & 8 & -2 \end{bmatrix}$$

Para reflexionar: ¿Es la matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 5 \\ 1 & 0 & -5 & -8 \\ 2 & -5 & 0 & 0 \\ 5 & 8 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ simétrica?

Finalmente, diremos que una **matriz** es **antisimétrica** si cumple que $A = -A^t$. Es importante mencionar que esto solo ocurre si se cumplen previamente dos condiciones: que la matriz A sea cuadrada y que los elementos de la diagonal principal sean todos ceros.

EJEMPLO 1.10

Si tenemos la matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$, al cambiar las filas por las columnas obtenemos la matriz $A^t = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$. Estas dos matrices no son iguales, pero si le cambiamos el signo a la matriz A^t obtendríamos $-A^t = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$, que en efecto es igual a A , es decir, $A = -A^t$.

Para identificar estas matrices podemos hacer una analogía similar a la que hemos hecho con las matrices simétricas y el espejo, solo que en este caso, el espejo siempre tendrá que estar formado por ceros y el reflejo sobre la diagonal debe cambiar el signo de cada elemento.

EJEMPLO 1.11

Un ejemplo de una matriz antisimétrica 3×3 es el siguiente:

$$B = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & 8 \\ 1 & -8 & 0 \end{bmatrix}$$

Observe que al escribir su matriz traspuesta se obtiene:

$$B^t = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & -8 \\ -1 & 8 & 0 \end{bmatrix}$$

y al multiplicar cada elemento de la matriz B^t por -1 , efectivamente resulta que $B = -B^t$. Verifíquelo.

Para reflexionar: *¿Por qué es necesario que la diagonal principal sea cero para que una matriz cuadrada sea antisimétrica?* Reflexione su respuesta usando la siguiente matriz:

$$C = \begin{bmatrix} 5 & -2 & -1 \\ 2 & 3 & 8 \\ 1 & -8 & -2 \end{bmatrix}$$

Operaciones con matrices

Una vez conocidos algunos tipos de matrices veamos ahora cómo podemos operar con ellas. En resumen, estudiaremos en detalle tres operaciones básicas: 1) *Suma y resta de matrices* 2) *Multipliación de un escalar por una matriz* y 3) *Multipliación de matrices*.

Suma y resta de matrices

Volvamos a la tabla 1 donde teníamos tres tipos de productos agrícolas alimenticios (cereales, tubérculos y legumbres) que se producían al mes dentro de una provincia por cuatro empresas diferentes (AgroPua, AgroImplante, Agropecuaria S.A. y ServiAgro).

Tabla 1

Cantidad en toneladas de productos que cada empresa produce al mes

	AgroPua	AgroImplante	Agropecuaria S. A.	ServiAgro
<i>Cereales</i>	3,5	3,3	2,5	1,9
<i>Tubérculos</i>	8	7,5	6	5,2
<i>Legumbres</i>	1,5	1,2	0,8	0,7

Si quisiéramos saber cuántas toneladas de cada tipo de producto se producen en el mes dentro de esta provincia ¿qué haríamos?

Para responder a la pregunta podemos formar cuatro matrices columnas definidas de la siguiente manera:

$$A \begin{bmatrix} 3,5 \\ 8 \\ 1,5 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 3,3 \\ 7,5 \\ 1,2 \end{bmatrix}; C = \begin{bmatrix} 2,5 \\ 6 \\ 0,8 \end{bmatrix}; D = \begin{bmatrix} 1,9 \\ 5,2 \\ 0,7 \end{bmatrix}$$

Los elementos de estas matrices representan la cantidad en toneladas de cada producto producido por empresa. Como queremos conocer las toneladas que se producen en la provincia sin importar la empresa que lo envía al mercado, solo tendremos que sumar elemento a elemento cada una de las matrices obteniendo una matriz de resultado que llamaremos R . Entonces tendríamos:

$$R = \begin{bmatrix} 3,5 \\ 8 \\ 1,5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3,3 \\ 7,5 \\ 1,2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2,5 \\ 6 \\ 0,8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1,9 \\ 5,2 \\ 0,7 \end{bmatrix}$$

$$R = \begin{bmatrix} 3,5 + 3,3 + 2,5 + 1,9 \\ 8 + 7,5 + 6 + 5,2 \\ 1,5 + 1,2 + 0,8 + 0,7 \end{bmatrix}$$

$$R = \begin{bmatrix} 11,2 \\ 26,7 \\ 4,2 \end{bmatrix}$$

De esta manera sabemos que en la provincia se producen en el mes 11,2 toneladas de cereales, 26,7 toneladas de tubérculos y 4,2 toneladas de legumbres.

Para reflexionar ¿puedo sumar matrices que no tengan el mismo tamaño?

Con base en lo anterior diremos lo siguiente respecto a la suma de matrices:

Para sumar (o restar) dos matrices es necesario que tengan el mismo orden y se suman (o restan) elemento a elemento formando otra matriz también del mismo orden.

EJERCICIO 1.1

Sean las matrices $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 8 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 0 & -5 \\ -5 & 8 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, calcule $A + B$ y $A - B$

$$A + B = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 8 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -5 \\ -5 & 8 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A + B = \begin{bmatrix} 1 + 0 & 5 + (-5) \\ -2 + (-5) & 8 + 8 \\ -1 + 2 & 5 + 1 \end{bmatrix}$$

$$A + B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -7 & 16 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}$$

Análogamente,

$$A - B = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 8 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -5 \\ -5 & 8 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A - B = \begin{bmatrix} 1 - 0 & 5 - (-5) \\ -2 - (-5) & 8 - 8 \\ -1 - 2 & 5 - 1 \end{bmatrix}$$

$$A - B = \begin{bmatrix} 1 & 10 \\ 3 & 0 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$$

PROBLEMA 1.1

Una finca productora de flores durante el mes de febrero del año 2019 vendió 80000 *tallos* de rosas de la variedad *Freedom*, 40000 *tallos* de la variedad *Explorer* y 40000 *tallos* de la variedad *Vendela*, mientras que en febrero del año 2020 la venta fue 70000 *tallos* de rosas de la variedad *Freedom*, 50000 *tallos* de la variedad *Explorer* y 43000 *tallos* de la variedad *Vendela*. Determinar la cantidad por variedad de *tallos* de rosas vendidos en el mes de febrero de los años 2019 y 2020.

SOLUCIÓN

Llamaremos a las matrices A (2019) y A (2020) a la cantidad de *tallos* de rosas vendidos por cada variedad durante el mes de febrero de los años 2019 y 2020, entonces:

$$A(2019) = \begin{matrix} & \begin{matrix} F & E & V \end{matrix} \\ \begin{matrix} F \\ E \\ V \end{matrix} & \begin{bmatrix} 80000 & 40000 & 40000 \end{bmatrix} \end{matrix} \begin{matrix} \\ \\ \end{matrix} \text{tallos}$$

$$A(2020) = \begin{matrix} & \begin{matrix} F & E & V \end{matrix} \\ \begin{matrix} F \\ E \\ V \end{matrix} & \begin{bmatrix} 70000 & 50000 & 43000 \end{bmatrix} \end{matrix} \begin{matrix} \\ \\ \end{matrix} \text{tallos}$$

Donde:

F : Cantidad de *tallos Freedom*.

E : Cantidad de *tallos Explorer*.

V : Cantidad de *tallos Vendela*.

Los elementos de cada matriz indican la cantidad de *tallos* de rosas por variedad.

Para determinar la cantidad total de *tallos* de rosas vendidos por cada variedad en los años 2019 y 2020 procedemos a efectuar la operación de suma de matrices.

$$C = A(2019) + A(2020)$$

$$C = \begin{bmatrix} 150000 & 90000 & 83000 \end{bmatrix}$$

Esto significa que en el mes de febrero de los años 2019 y 2020 se vendieron 150000 tallos de rosas de la variedad Freedom, 90000 tallos de la variedad Explorer y 83000 tallos de la variedad Vendela.

PROBLEMA 1.2

La granja La Primavera en el año 2019 tenía 200 *vacas*, 80 *toros* y 30 *caballos*, actualmente dispone del 40 % de las vacas, 60 % de los toros y 100 % de los caballos; con estos datos se pide:

- Escriba como matriz la cantidad de *vacas*, *toros* y *caballos* que en el año 2019 había en la granja.
- Determine la matriz de animales actuales.
- Calcule la cantidad de animales que han muerto desde el año 2019 hasta hoy día.

SOLUCIÓN

1. Procedemos a escribir los datos del año 2019, como una matriz columna:

$$A(2019) = \begin{matrix} & \begin{matrix} G \\ \begin{bmatrix} 200 \\ 80 \\ 30 \end{bmatrix}_{3 \times 1} \end{matrix} \\ \begin{matrix} vacas \\ toros \\ caballos \end{matrix} \end{matrix}$$

Donde:

G : Es la granja La Primavera.

Los elementos de la matriz $A(2019)$, indican la cantidad de animales (*vacas*, *toros* y *caballos*) que había en la granja en el año 2019.

2. Observe que el 40 % de las *vacas* se puede escribir como: $200 \cdot 0,40 = 80$, el 60 % de los *toros* es igual a: $80 \cdot 0,60 = 48$. Ahora la cantidad de animales actuales puede ser escrita como una matriz columna que escribiremos de la siguiente manera:

$$A(Act) = \begin{matrix} & G \\ & \begin{bmatrix} 80 \\ 48 \\ 30 \end{bmatrix}_{3 \times 1} \\ & \begin{matrix} vacas \\ toros \\ caballos \end{matrix} \end{matrix}$$

3. Para determinar la cantidad de animales que han muerto en la granja se procede con la operación de resta de matrices, tal como se muestra a continuación:

$$B = A(2019) - A(Act)$$

$$B = \begin{bmatrix} 200 \\ 80 \\ 30 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 80 \\ 48 \\ 30 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 120 \\ 32 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Los elementos de la matriz B indican que han muerto 120 *vacas* y 32 *toros*, mientras la cantidad de *caballos* sigue siendo la misma desde el año 2019 hasta hoy día porque no ha muerto ninguno.

PROBLEMA 1.3

Una empresa florícola durante el mes de enero del año 2021 vendió la primera semana 100000 *tallos* de rosas *Proud*, 200000 *tallos* de rosas *Náutica*, 120000 *tallos* de rosas *Tutti Frutti* y 90000 *tallos* de rosas *Vendela*. La segunda semana 120000 *tallos* de rosas *Proud*, 140000 *tallos* de rosas *Náutica*, 160000 *tallos* de rosas *Tutti Frutti* y 110000 *tallos* de rosas *Vendela*. La tercera y cuarta semanas comercializó 200000 *tallos* de cada variedad de rosa. Determine la cantidad de variedades de *tallos* de rosas vendidos durante el mes de enero del 2021.

SOLUCIÓN

Formamos 4 matrices A_1 A_2 A_3 A_4 , cada una de las cuales representa la venta de tallos por semana.

$$A_1 = \begin{matrix} & P & N & TF & V \\ & 100000 & 200000 & 120000 & 90000 \end{matrix}]_{1 \times 4} \text{ tallos}$$

$$A_2 = \begin{matrix} & P & N & TF & V \\ \begin{matrix} P & N & TF & V \end{matrix} & \begin{bmatrix} 120000 & 140000 & 160000 & 110000 \end{bmatrix}_{1 \times 4} \end{matrix} \text{ tallos}$$

$$A_3 = \begin{matrix} & P & N & TF & V \\ \begin{matrix} P & N & TF & V \end{matrix} & \begin{bmatrix} 200000 & 200000 & 200000 & 200000 \end{bmatrix}_{1 \times 4} \end{matrix} \text{ tallos}$$

$$A_4 = \begin{matrix} & P & N & TF & V \\ \begin{matrix} P & N & TF & V \end{matrix} & \begin{bmatrix} 200000 & 200000 & 200000 & 200000 \end{bmatrix}_{1 \times 4} \end{matrix} \text{ tallos}$$

Donde:

P : Número de *tallos* de rosas *Proud*.

N : Número de *tallos* de rosas *Náutica*.

TF : Número de *tallos* de rosas *Tutti Frutti*.

V : Número de *tallos* de rosas *Vendela*.

Los elementos de las matrices A_1 A_2 A_3 y A_4 indican la cantidad de tallos vendidos por variedad de rosa.

Para responder a la pregunta efectuamos la operación de suma de matrices como se muestra a continuación:

$$B = A_1 + A_2 + A_3 + A_4$$

$$B = \begin{bmatrix} 620000 & 740000 & 680000 & 600000 \end{bmatrix}$$

Esto significa que la florícola durante el mes de enero del año 2021 vendió, 620000 *tallos* de rosas *Proud*, 740000 *tallos* de rosas *Náutica*, 680000 *tallos* de rosas *Tutti Frutti* y 600000 *tallos* de rosas *Vendela*.

PROBLEMA 1.4

Una granja productora de lácteos produce cuatro tipos de quesos: *cheddar*, *gouda*, *parmesano* y *mozzarella*, durante los primeros cuatro días de la primera semana del mes de marzo del 2021 vendió lo siguiente: el *lunes* comercializó 20 kg de queso *cheddar*, 8 kg de queso *gouda*, 15 kg de queso *parmesano* y 6 kg de queso *mozzarella*. El *martes* vendió 20 kg de queso *cheddar*, 9 kg de queso *gouda*, 5 kg de queso *parmesano* y 8 kg de queso *mozzarella*. El *miércoles* y *jueves* vendió 30 kg de queso *cheddar*, 4 kg de queso *gouda*, 5 kg de queso *parmesano*

y 4 kg de *queso mozzarella*. Si la semana siguiente durante los mismos cuatro días vendió el 50 % de lo comercializado durante la primera semana, determine la cantidad en kg de cada tipo de *queso* vendido durante la primera quincena del mes de marzo del 2021.

SOLUCIÓN

Formaremos ocho matrices $Ls1, Ms1, Mis1, Js1, Ls2, Ms2, Mis2, Js2$ cada una de ellas representan la venta en kg por tipo de queso vendido durante los días lunes, martes, miércoles y jueves de la primera y segunda semana del mes de marzo del 2021.

$$\begin{aligned}
 Ls1 &= \begin{matrix} & qc & qg & qp & qm \\ \begin{bmatrix} 20 & 8 & 15 & 6 \end{bmatrix}_{1 \times 4} & kg \end{matrix} \\
 Ms1 &= \begin{matrix} & qc & qg & qp & qm \\ \begin{bmatrix} 20 & 9 & 5 & 8 \end{bmatrix}_{1 \times 4} & kg \end{matrix} \\
 Mis1 &= \begin{matrix} & qc & qg & qp & qm \\ \begin{bmatrix} 30 & 4 & 5 & 4 \end{bmatrix}_{1 \times 4} & kg \end{matrix} \\
 Js1 &= \begin{matrix} & qc & qg & qp & qm \\ \begin{bmatrix} 30 & 4 & 5 & 4 \end{bmatrix}_{1 \times 4} & kg \end{matrix}
 \end{aligned}$$

Donde:

qc : Kilogramos de *queso cheddar*.

qg : Kilogramos de *queso gouda*.

qp : Kilogramos de *queso parmesano*.

qm : Kilogramos de *queso mozzarella*.

$Ls1$: Lunes de la semana 1.

$Ms1$: Martes de la semana 1.

$Mis1$: Miércoles de la semana 1.

$Js1$: Jueves de la semana 1.

Para la siguiente semana durante los mismos cuatro días las matrices quedan definidas por la venta en kg del 50 % de lo comercializado durante la primera semana, es decir:

$$ls2 = \begin{matrix} & qc & qg & qp & qm \\ [10 & 4 & 7,5 & 3]_{1 \times 4} \end{matrix} kg$$

$$ms2 = \begin{matrix} & qc & qg & qp & qm \\ [10 & 4,5 & 2,5 & 4]_{1 \times 4} \end{matrix} kg$$

$$mis2 = \begin{matrix} & qc & qg & qp & qm \\ [15 & 2 & 2,5 & 2]_{1 \times 4} \end{matrix} kg$$

$$js2 = \begin{matrix} & qc & qg & qp & qm \\ [15 & 2 & 2,5 & 2]_{1 \times 4} \end{matrix} kg$$

Donde:

ls2: Lunes de la semana 2.

ms2: Martes de la semana 2.

mis2: Miércoles de la semana 2.

js2: Jueves de la semana 2.

Los elementos de las matrices *ls1*, *ms1*, *mis1*, *js1*, *ls2*, *ms2*, *mis2*, y *js2* indican por día y semana la cantidad en kilogramos de tipo de queso vendido.

Para determinar la cantidad de kilogramos de queso vendido durante la quincena procedemos a efectuar la suma de matrices, cuyo resultado se muestra a continuación:

$$B = ls1 + ms1 + mis1 + js1 + ls2 + ms2 + mis2 + js2$$

$$B = [150 \quad 37,5 \quad 45 \quad 33]$$

Es decir, durante la quincena la granja vendió 150 kg de queso cheddar, 37,5 kg de queso gouda, 45 kg de queso parmesano y 33 kg de queso mozzarella.

Producto de una matriz por escalar

Siguiendo con el ejemplo de la tabla 1, supongamos que ahora queremos conocer ¿Cuántas toneladas de cada tipo de producto envían al mercado cada empresa en un año?

Tabla 1

Cantidad en toneladas de productos que cada empresa produce al mes

Empresa Tipo	AgroPua	AgroImplante	Agropecuaria S. A.	ServiAgro
<i>Cereales</i>	3,5	3,3	2,5	1,9
<i>Tubérculos</i>	8	7,5	6	5,2
<i>Legumbres</i>	1,5	1,2	0,8	0,7

Para ello, recordemos que la tabla 1 podíamos representarla por la matriz:

$$P = \begin{bmatrix} 3,5 & 3,3 & 2,5 & 1,9 \\ 8 & 7,5 & 6 & 5,2 \\ 1,5 & 1,2 & 0,8 & 0,7 \end{bmatrix}$$
, que representa la cantidad en toneladas de los productos enviados mensualmente por cada empresa al mercado. Asumiendo que todos los meses las empresas mantienen constante su producción parece razonable que para conocer la producción de un año solo multipliquemos cada elemento de la matriz por 12, que representa la cantidad de meses que tiene un año. Así tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} 12 \cdot P &= 12 \cdot \begin{bmatrix} 3,5 & 3,3 & 2,5 & 1,9 \\ 8 & 7,5 & 6 & 5,2 \\ 1,5 & 1,2 & 0,8 & 0,7 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 42 & 39,6 & 30 & 22,8 \\ 96 & 90 & 72 & 62,4 \\ 18 & 14,4 & 9,6 & 8,4 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Podemos organizar los elementos de esta matriz en la tabla 2 para responder a nuestra pregunta:

Tabla 2

Cantidad en toneladas de productos que cada empresa produce al año

Empresa Tipo	AgroPua	AgroImplante	Agropecuaria S. A.	ServiAgro
<i>Cereales</i>	42	39,6	30	22,8
<i>Tubérculos</i>	96	90	72	62,4
<i>Legumbres</i>	18	14,4	9,6	8,4

En este sentido diremos que, para realizar el producto de una matriz por un escalar, solo debemos multiplicar cada elemento de la matriz por el escalar:

EJERCICIO 1.2

Sean las matrices $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 8 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 0 & -5 \\ -5 & 8 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, calcule $2 \cdot (A + B)^t$

Primero calculamos $A + B$

$$\begin{aligned} A + B &= \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 8 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -5 \\ -5 & 8 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \\ A + B &= \begin{bmatrix} 1+0 & 5+(-5) \\ -2+(-5) & 8+8 \\ -1+2 & 5+1 \end{bmatrix} \\ A + B &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -7 & 16 \\ 1 & 6 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Luego escribimos su traspuesta,

$$(A + B)^t = \begin{bmatrix} 1 & -7 & 1 \\ 0 & 16 & 6 \end{bmatrix}$$

Finalmente, multiplicamos cada elemento de la matriz resultante por 2.

$$\begin{aligned} 2 \cdot (A + B)^t &= 2 \cdot \begin{bmatrix} 1 & -7 & 1 \\ 0 & 16 & 6 \end{bmatrix} \\ 2 \cdot (A + B)^t &= \begin{bmatrix} 2 & -14 & 2 \\ 0 & 32 & 12 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Consideremos otros problemas para afianzar el tema.

PROBLEMA 1.5

Una feria agroecológica oferta productos en dos presentaciones. La *funda A* contiene 400 gramos de *papas* y 510 gramos de *zanahoria*. La *funda B*, contiene 1400 gramos de *papas* y 2000 gramos de *zanahorias*. Si se venden 40 *fundas del tipo A* y 64 *del tipo B*. Determine la cantidad total en gramos, de *papas* y *zanahorias* vendidas.

SOLUCIÓN

Se procede a formar las matrices con los datos proporcionados.

Los datos se pueden escribir como matrices columnas de la siguiente manera:

$$A = \begin{matrix} fa \\ \begin{bmatrix} 400 \\ 510 \end{bmatrix}_{2 \times 1} \end{matrix} \quad \begin{matrix} p \\ z \end{matrix} \quad B = \begin{matrix} fb \\ \begin{bmatrix} 1400 \\ 2000 \end{bmatrix}_{2 \times 1} \end{matrix} \quad \begin{matrix} p \\ z \end{matrix}$$

Donde:

p : Gramos de *papa*.

z : Gramos de *zanahoria*.

fa : *Funda A*.

fb : *Funda B*.

Los elementos de las matrices A y B indican la cantidad en gramos de *papas* y *zanahorias* que hay por tipo de *funda*.

Para responder a la pregunta efectuamos la operación del producto de una matriz por un escalar y luego la suma de matrices:

$$40A + 64B = \begin{bmatrix} 16000 \\ 20400 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 89600 \\ 128000 \end{bmatrix}$$

El resultado de esta operación la llamaremos $C = \begin{bmatrix} 105600 \\ 148400 \end{bmatrix}$, es decir se venden en total 105600 gramos de *papas* y 148400 gramos de *zanahorias* entre las *fundas A* y *B*.

PROBLEMA 1.6

Una fábrica de lácteos, oferta tres tipos de queso en bandejas con tres presentaciones diferentes. La bandeja *A* contiene 300 gramos de *queso de hoja*, 310 gramos de *queso amasado* y 400 gramos de *queso fresco*. La bandeja *B*, contiene 400 gramos de *queso de hoja*, 210 gramos de *queso amasado* y 300 gramos de *queso fresco*, mientras que la bandeja *C* contiene 500 gramos de cada tipo de *queso*. Si se venden 50 bandejas del tipo *A*, 40 del tipo *B* y 100 del tipo *C*; determine la cantidad en kilogramos, de cada tipo de queso vendido.

SOLUCIÓN

Procedemos a formar las matrices con los datos proporcionados.

Las bandejas se pueden escribir como matrices filas de la siguiente manera:

$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} qh & qa & qf \end{matrix} \\ \begin{matrix} 300 & 310 & 400 \end{matrix} & \end{matrix}_{1 \times 3} \text{ gramos}$$

$$B = \begin{matrix} & \begin{matrix} qh & qa & qf \end{matrix} \\ \begin{matrix} 400 & 210 & 300 \end{matrix} & \end{matrix}_{1 \times 3} \text{ gramos}$$

$$C = \begin{matrix} & \begin{matrix} qh & qa & qf \end{matrix} \\ \begin{matrix} 500 & 500 & 500 \end{matrix} & \end{matrix}_{1 \times 3} \text{ gramos}$$

Donde:

qh: Gramos de *queso de hoja*.

qa: Gramos de *queso amasado*.

qf: Gramos de *queso fresco*.

Los elementos de las matrices *A*, *B* y *C* indican la cantidad en gramos por tipo de *queso*.

Una vez escritas las matrices, efectuamos la operación del producto de una matriz por un escalar y la suma de matrices tal como se muestra a continuación:

$$\begin{aligned}
 &50A + 40B + 100C = \\
 &[15000 \quad 15500 \quad 20000]_{1 \times 3} + [16000 \quad 8400 \quad 12000]_{1 \times 3} + \\
 &[15000 \quad 15500 \quad 20000]_{1 \times 3} + [16000 \quad 8400 \quad 12000]_{1 \times 3} + \\
 &\quad [50000 \quad 50000 \quad 50000]_{1 \times 3} \\
 &[15000 \quad 15500 \quad 20000] + [16000 \quad 8400 \quad 12000] + \\
 &[15000 \quad 15500 \quad 20000] + [16000 \quad 8400 \quad 12000] + \\
 &\quad [50000 \quad 50000 \quad 50000]
 \end{aligned}$$

Al efectuar la suma de matrices se obtiene una matriz que llamaremos D , definida por:

$$D = [81000 \quad 73900 \quad 82000]$$

Sin embargo, estos resultados están expresados en gramos y la pregunta debe responder a la cantidad en kilogramos, para esto dividimos cada elemento de la matriz D entre 1000, resultando la matriz E .

$$E = [81 \quad 73,9 \quad 82]$$

Observe que, al dividir cada elemento de la matriz entre mil, lo que realmente estamos haciendo es multiplicar a la matriz D por el escalar $\frac{1}{1000}$

Los resultados obtenidos muestran que se venden 81 kg de *queso de hoja*, 73,9 kg de *queso amasado* y 82 kg de *queso fresco*.

PROBLEMA 1.7

Alejandro, María y Juan van juntos a comprar frutas para sus restaurantes. *Alejandro* compró 10 *bananas*, 16 *melones* y 20 *tomates de árbol*, *María* pidió 16 *bananas*, 12 *melones* y 14 *tomates de árbol* y *Juan* compró 24 *bananas*, 8 *melones* y 12 *tomates de árbol*. Se pide:

1. Escribir como matriz la cantidad de frutas que compraron *Alejandro, María y Juan*.

2. Determinar la matriz que se obtiene, si cada uno compra solo el 50 % de cada fruta.
3. Calcular la cantidad total de frutas que compró *Alejandro*, *María* y *Juan*.

SOLUCIÓN

La matriz que representa la cantidad de frutas que compró cada uno sería:

$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} b & m & ta \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 10 & 16 & 20 \\ 16 & 12 & 14 \\ 24 & 8 & 12 \end{bmatrix}_{3 \times 3} & \begin{matrix} Alejandro \\ María \\ Juan \end{matrix} \end{matrix}$$

Donde:

b: Cantidad de *bananas*.

m: Cantidad de *melones*.

ta: Cantidad de *tomates de árbol*.

Para determinar la matriz *B* que representa la compra de solo el 50 % de cada fruta, debemos multiplicar cada elemento de la matriz *A*, por $\frac{1}{2}$. Así *B* resulta:

$$B = \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} 10 & 16 & 20 \\ 16 & 12 & 14 \\ 24 & 8 & 12 \end{bmatrix}$$

Resultando,

$$B = \begin{matrix} & \begin{matrix} b & m & ta \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 5 & 8 & 10 \\ 8 & 6 & 7 \\ 12 & 4 & 6 \end{bmatrix}_{3 \times 3} & \begin{matrix} Alejandro \\ María \\ Juan \end{matrix} \end{matrix}$$

Para calcular la cantidad de *bananas*, *melones* y *tomates de árbol* que compraron cada uno, procedemos a efectuar la operación de suma de matrices, así:

$$C = A + B = \begin{bmatrix} 10 & 16 & 20 \\ 16 & 12 & 14 \\ 24 & 8 & 12 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 8 & 10 \\ 8 & 6 & 7 \\ 12 & 4 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 & 24 & 30 \\ 24 & 18 & 21 \\ 36 & 12 & 18 \end{bmatrix}$$

Esto significa que *Alejandro* compró 15 *bananas*, 24 *melones* y 30 *tomates de árbol*. *María* compró 24 *bananas*, 18 *melones* y 21 *tomates de árbol* y *Juan* compró 36 *bananas*, 12 *melones* y 18 *tomates de árbol*.

Algoritmo para el producto de matrices

El objetivo de este apartado es explicar el proceso en detalle que debemos realizar para resolver esta operación, ya que, a diferencia de la suma, resta y producto de una matriz por un escalar, el producto de matrices no sigue un proceso intuitivo.

Para ello, empecemos por definir el **producto escalar** entre una matriz fila y una matriz columna.

DEFINICIÓN 1.1

Sean $A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$ dos matrices, entonces el **producto escalar** entre las matrices A y B se define como:

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + \dots + a_n \cdot b_n \end{bmatrix}$$

Es importante hacer dos observaciones con respecto a esta definición, en primer lugar, note que ambas matrices tienen el mismo número de elementos y, en segundo lugar, el resultado de multiplicarlas escalarmente da como resultado una matriz de orden 1×1 , lo cual podremos asumir simplemente como un escalar. Esto lo podemos resumir como:

El producto escalar de una matriz fila por una matriz columna da como resultado un escalar.

Teniendo esta idea clara, definamos ahora el producto de dos matrices, respondiendo dos preguntas:

1. ¿Cuándo puedo realizar la operación del producto de dos matrices?

El producto entre dos matrices solo está definido si el **número de columnas de la primera** matriz es igual al **número de filas de la segunda**.

Por ejemplo, el producto, $A_{3 \times 2} \cdot B_{2 \times 4}$ está definido porque la matriz A tiene 2 columnas y la matriz B tiene 2 filas.

Más aún, el resultado de la multiplicación entre las dos matrices será una tercera matriz cuyo orden es el número de filas de la primera por el número de columnas de la segunda. Para el ejemplo anterior se tiene:

$$A_{3 \times 2} \cdot B_{2 \times 4} = C_{3 \times 4}$$

Podemos generalizar esta idea con la siguiente expresión:

$$A_{m \times s} \cdot B_{s \times n} = C_{m \times n}$$

La otra pregunta es,

2. ¿Cómo se realiza el producto de dos matrices?

El producto de dos matrices, siempre que sea posible, se encuentra multiplicando escalarmente las **filas de la primera matriz** por cada **columna de la segunda matriz** (Castañeda *et al.*, 2020) colocando el escalar resultante en la fila y la columna correspondientes a las utilizadas, por ejemplo, si multiplico escalarmente la **segunda fila** de la primera matriz con la **tercera columna** de la segunda matriz, resultará un escalar que debe colocarse en la posición correspondiente al **segunda fila y tercera columna**. Puede encontrarse una explicación más formal en (Estruch *et al.*, 2017).

Veamos un ejemplo que ilustre esta situación.

EJERCICIO 1.3

Sean las matrices $A = \begin{bmatrix} -3 & 2 & -2 \\ -1 & 5 & 4 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \\ -1 & 5 & 3 \end{bmatrix}$.

- ¿El producto $B \cdot A$ está definido? ¿Por qué?
- ¿El producto $A \cdot B$ está definido? ¿Por qué?
- Halle el producto que esté definido.

SOLUCIÓN

- Veamos si $B \cdot A$ existe. Para ello, planteemos el producto de las dos matrices con sus respectivos tamaños:

$$\begin{bmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \\ -1 & 5 & 3 \end{bmatrix}_{3 \times 3} \begin{bmatrix} -3 & 2 & -2 \\ -1 & 5 & 4 \end{bmatrix}_{2 \times 3}$$

Observa que el producto de las dos matrices no es posible porque la primera matriz tiene 3 columnas mientras la segunda matriz tiene solo 2 filas.

- Veamos ahora el caso de $A \cdot B$, en este caso tenemos,

$$\begin{bmatrix} -3 & 2 & -2 \\ -1 & 5 & 4 \end{bmatrix}_{2 \times 3} \begin{bmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \\ -1 & 5 & 3 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$$

Como puedes notar en este caso sí podemos resolver el producto de las dos matrices, ya que el número de columnas de la primera matriz es igual al número de filas de la segunda. Fíjese que si esto no se cumpliera no podríamos multiplicar escalarmente las filas por cada columna puesto que no tendrían el mismo número de elementos.

Resolvamos este último producto en detalle, llamemos a la matriz resultante C , y su orden ya sabemos debe ser 2×3 . ¿Por qué?

$$C_{2 \times 3} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 2 & -2 \\ -1 & 5 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \\ -1 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$

Sugerimos al lector, que tome un lápiz y un papel y vaya escribiendo paso a paso el proceso que vamos explicando a fin de asegurar una mejor comprensión del mismo.

Empezamos por multiplicar escalarmente la **primera fila** de la matriz A por la **primera columna** de la matriz B, y colocar el escalar resultante en la posición c_{11} , es decir, **fila uno – columna 1**.

$$\begin{bmatrix} -3 & 2 & -2 \\ -1 & 5 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \\ -1 & 5 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \end{bmatrix}$$

Al resolver obtenemos,

$$c_{11} = \begin{bmatrix} -3 & 2 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -3 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} = -3 \cdot (-3) + 2 \cdot 3 + (-2) \cdot (-1) = 17$$

Luego,

$$\begin{bmatrix} -3 & 2 & -2 \\ -1 & 5 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \\ -1 & 5 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \end{bmatrix}$$

Multipliquemos escalarmente ahora la **primera fila** de A por la **segunda columna** de B, y el escalar irá en la posición c_{12} , es decir en la posición **fila uno – columna 2**.

$$\begin{bmatrix} -3 & 2 & -2 \\ -1 & 5 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \\ -1 & 5 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \end{bmatrix}$$

$$c_{12} = \begin{bmatrix} -3 & 2 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 5 \end{bmatrix} = -3 \cdot (2) + 2 \cdot (-2) + (-2) \cdot 5 = -20$$

Luego,

$$\begin{bmatrix} -3 & 2 & -2 \\ -1 & 5 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \\ -1 & 5 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 & -20 & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \end{bmatrix}$$

Al repetir este proceso vamos obteniendo lo siguiente,

$$\begin{bmatrix} -3 & 2 & -2 \\ -1 & 5 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \\ -1 & 5 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 & -20 & -1 \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -3 & 2 & -2 \\ -1 & 5 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \\ -1 & 5 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 & -20 & -1 \\ 14 & c_{22} & c_{23} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -3 & 2 & -2 \\ -1 & 5 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \\ -1 & 5 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 & -20 & -1 \\ 14 & 8 & c_{23} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -3 & 2 & -2 \\ -1 & 5 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \\ -1 & 5 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 & -20 & -1 \\ 14 & 8 & 18 \end{bmatrix}$$

Finalmente, tenemos que el producto de las matrices viene dado por,

$$\begin{bmatrix} -3 & 2 & -2 \\ -1 & 5 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \\ -1 & 5 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 & -20 & -1 \\ 14 & 8 & 18 \end{bmatrix}$$

Veamos un segundo ejemplo para aclarar cualquier duda que haya surgido.

EJERCICIO 1.4

$$\begin{bmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 1 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$$

SOLUCIÓN

Repetamos el proceso aplicado en el ejemplo anterior y observa que la matriz resultante, que llamaremos C , en este caso es de orden 2×2 ¿Por qué?

$$\begin{bmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 1 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \cdot (-4) + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 3 & c_{12} \\ & c_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 1 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 & -3 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 1 \cdot 5 \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 & 5 \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 1 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 & 5 \\ 3 \cdot (-4) + 5 \cdot 1 + 7 \cdot 3 & c_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 & 5 \\ 14 & c_{22} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 1 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 & 5 \\ 14 & 3 \cdot 2 + 5 \cdot 3 + 7 \cdot 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 & 5 \\ 14 & 56 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto, el producto de las matrices viene dado por:

$$\begin{bmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 1 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 & 5 \\ 14 & 56 \end{bmatrix}$$

Como último ejemplo analicemos el siguiente producto.

EJERCICIO 1.5

$$\begin{bmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \\ -1 & 5 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

SOLUCIÓN

En este caso, estamos multiplicando una matriz de orden 3×3 por la matriz identidad del mismo orden.

Como mencionamos antes, la matriz identidad tiene la propiedad de actuar como elemento neutro en el producto de matrices, por lo tanto, dejamos como tarea al lector verificar que efectivamente se cumple:

$$\begin{bmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \\ -1 & 5 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \\ -1 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$

Además, puede fácilmente verificarse que para este caso particular donde uno de los factores es una matriz identidad se cumple la propiedad conmutativa, es decir:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \\ -1 & 5 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \\ -1 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$

Realicemos un ejercicio de operaciones combinadas:

EJERCICIO 1.6

Sean las matrices

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 3 & -4 \\ 5 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 4 & -4 & 5 \\ 5 & 4 & 2 \\ 6 & 3 & -5 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} -6 & 3 & 5 \\ 5 & -5 & -6 \end{bmatrix}.$$

Determine:

$$A^t \cdot B + 4 \cdot C$$

SOLUCIÓN

Escribimos A^t a partir de la matriz A :

$$A^t = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 5 \\ 4 & -4 & 0 \end{bmatrix}$$

Ahora resolvamos el producto $A^t \cdot B$.

$$A^t \cdot B = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 5 \\ 4 & -4 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & -4 & 5 \\ 5 & 4 & 2 \\ 6 & 3 & -5 \end{bmatrix}$$

$$A^t \cdot B = \begin{bmatrix} 57 & 15 & -4 \\ -4 & -32 & 12 \end{bmatrix}$$

Luego calculamos $4 \cdot C$

$$4 \cdot C = 4 \cdot \begin{bmatrix} -6 & 3 & 5 \\ 5 & -5 & -6 \end{bmatrix}$$

$$4 \cdot C = \begin{bmatrix} -24 & 12 & 20 \\ 20 & -20 & -24 \end{bmatrix}$$

Finalmente, resolvemos la suma $A^t \cdot B + 4 \cdot C$

$$A^t \cdot B + 4 \cdot C = \begin{bmatrix} 57 & 15 & -4 \\ -4 & -32 & 12 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -24 & 12 & 20 \\ 20 & -20 & -24 \end{bmatrix}$$

$$A^t \cdot B + 4 \cdot C = \begin{bmatrix} 33 & 27 & 16 \\ 16 & -52 & -12 \end{bmatrix}$$

Producto de matrices aplicado a las actividades agropecuarias

Estudiemos algunos ejemplos de aplicaciones prácticas en este apartado para concretar el producto de matrices.

PROBLEMA 1.8

Una granja productora de hortalizas, durante una semana vende 5000 kg de *zuquini*, 8000 kg *pepinillo* y 15000 kg de *tomates*, si el precio de venta de cada hortaliza por kg es \$0,5 \$1,0 y \$1,5 respectivamente. Determine el valor en dólares generado por la venta de todas las hortalizas durante la semana.

SOLUCIÓN

Para determinar la venta total en dólares de las hortalizas debemos multiplicar el precio por la cantidad vendida esto matricialmente se traduce al producto de matrices, debemos entonces formar dos matrices cuyo producto se pueda realizar, de esta manera la matriz A y B resultan:

$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} z & p & t \end{matrix} \\ \begin{matrix} 5000 & 8000 & 15000 \end{matrix} & \begin{matrix} kg \end{matrix} \end{matrix} \quad B = \begin{matrix} & \$ \\ \begin{matrix} 0,5 \\ 1,0 \\ 1,5 \end{matrix} & \begin{matrix} z \\ p \\ t \end{matrix} \end{matrix}_{3 \times 1}$$

Donde:

z : Kilogramos de *zuquini*.

p : Kilogramos de *pepinillo*.

t : Kilogramos de *tomate*.

Los elementos de la matriz A representan la cantidad en kg vendida por cada tipo de hortaliza (*zuquini*, *pepinillo* y *tomates*), mientras que los elementos de B identifican por hortaliza el precio en dólares. Si planteamos el producto de las matrices A y B resulta:

$$C = \begin{bmatrix} 5000 & 8000 & 15000 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0,5 \\ 1,0 \\ 1,5 \end{bmatrix}$$

$$C = [5000 \cdot 0,5 + 8000 \cdot 1,0 + 15000 \cdot 1,5]$$

$$C = [33000]$$

Como resultado obtenemos la matriz $C = [33000]$, esto significa que el ingreso por la venta de todas las hortalizas es: \$33000.

PROBLEMA 1.9

Las granjas *Mi Tesoro*, *Mi Princesa* y *Cayambe* cosechan fréjol, papas y cebollas. *Mi Tesoro* produce 3000 kg de fréjol, 2500 kg de papas y 2000 kg de cebollas. *Mi Princesa* cultiva 4000 kg de fréjol, 1500 kg

de papas y 3200 kg de cebollas. La granja *Cayambe* produce 2000 kg de fréjol, 2500 kg de papas y 2000 kg de cebollas. Si la ganancia por kg de fréjol, papas y cebollas es de: \$0,25, \$0,30, y \$0,28 respectivamente. Determine la ganancia en dólares por venta de cada tipo de cosecha.

SOLUCIÓN

Para calcular la ganancia en dólares por la venta de toda la cosecha simplemente multiplicamos la cantidad de producto vendido por el precio, esta operación implica el producto de matrices.

$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} f & p & c \end{matrix} \\ \begin{matrix} 3000 & 2500 & 2000 \\ 4000 & 1500 & 3200 \\ 2000 & 2500 & 2000 \end{matrix} & \begin{matrix} \\ \\ \end{matrix} \end{matrix}_{3 \times 3} \quad \begin{matrix} \\ \\ \end{matrix} \begin{matrix} \text{Mi Tesoro} \\ \text{Mi Princesa} \\ \text{Cayambe} \end{matrix} \quad B = \begin{matrix} & \$ \\ \begin{matrix} 0,25 \\ 0,30 \\ 0,28 \end{matrix} & \begin{matrix} f \\ p \\ c \end{matrix} \end{matrix}_{3 \times 1}$$

Donde:

f : Kilogramos de fréjol.

p : Kilogramos de papas.

c : Kilogramos de cebollas.

Los elementos de la matriz A representan la cantidad en kilogramos que se cosecha en cada granja por tipo de cultivo, mientras que los elementos de la matriz B , indican por producto cosechado el precio en dólares.

Llamaremos a la matriz C el resultado de la operación del producto de las matrices.

$$C = \begin{bmatrix} 3000 & 2500 & 2000 \\ 4000 & 1500 & 3200 \\ 2000 & 2500 & 2000 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0,25 \\ 0,30 \\ 0,28 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2060 \\ 2346 \\ 1810 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 2060 \\ 2346 \\ 1810 \end{bmatrix}$$

Esto significa que el ingreso por la venta de *fréjol*, *papas* y *cebollas* cosechadas es de: \$2060, \$2346, y \$1810 respectivamente.

PROBLEMA 1.10

Una granja porcina compra quincenalmente *soya* y *maíz* para elaborar el suplemento alimenticio para sus cerdos, para ello cuenta con dos proveedores; la cantidad de *soya* y *maíz* en kilogramos que requiere se muestran en la matriz A . En las matrices B y C se muestra por materia prima el precio en dólares según cada *proveedor*. Determine ¿Cuál *proveedor* por quincena le resulta mejor a la granja?

$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} s & m \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 450 & 550 \\ 420 & 480 \end{bmatrix}_{2 \times 2} & \begin{matrix} s1 \\ s2 \end{matrix} \end{matrix} \quad B = \begin{matrix} \begin{matrix} \$Prov 1 \\ \$Prov 2 \end{matrix} & \begin{matrix} s \\ m \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 25 \\ 10 \end{bmatrix}_{2 \times 1} & \end{matrix} \quad C = \begin{matrix} \begin{matrix} \$Prov 1 \\ \$Prov 2 \end{matrix} & \begin{matrix} s \\ m \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 20 \\ 16 \end{bmatrix}_{2 \times 1} & \end{matrix}$$

SOLUCIÓN

Procedemos a definir las variables involucradas en el problema.

- s : Kilogramos de *soya*.
- m : Kilogramos de *maíz*.
- $s1$: *Semana 1*.
- $s2$: *Semana 2*.

Los elementos de la matriz A identifican por semana la cantidad en kilogramos de *maíz* y *soya*, mientras los elementos de B y C representan por materia prima el precio en dólares por proveedor.

Para determinar cuál de los dos proveedores resulta mejor se procede a efectuar la operación del producto de matrices:

$$D = A \cdot B = \begin{bmatrix} 450 & 550 \\ 420 & 480 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 25 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16750 \\ 15300 \end{bmatrix}$$

$$E = A \cdot C = \begin{bmatrix} 450 & 550 \\ 420 & 480 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 20 \\ 16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17800 \\ 16080 \end{bmatrix}$$

Los elementos de las matrices D y E muestran por cada semana, el costo en dólares de la *soya* y el *maíz* por cada proveedor, según los resultados para la quincena (semana 2) el *proveedor* 1, le es más conveniente a la granja porque el costo es menor, es decir $\$15300 < \16080 .

PROBLEMA 1.11

José tiene una granja que produce *manzanas*, *duraznos* y *peras*; durante el mes de enero vende toda la producción a los mercados, *El Baratillo*, *El Ahorro* y *El Popular*. En la primera y segunda semana le vende al *Baratillo* 100 *manzanas*, 200 *duraznos* y 120 *peras*, al *Ahorro* le comercializa 120 *manzanas*, 250 *duraznos* y 180 *peras* y al *Popular* le vende 80 *manzanas*, 75 *duraznos* y 95 *peras*. En la tercera semana vende a cada mercado 20 unidades más de cada fruta y en la cuarta semana vende 100 unidades de cada fruta a cada mercado. Determine cuántos productos al mes vendió José entre todos los mercados y cuánto recibe de ingreso por la venta de cada tipo de frutas durante el mes de enero. Considere el precio por unidad de *manzana*, *durazno* y *pera* igual a: \$0,20, \$0,15 y \$0,20 respectivamente.

SOLUCIÓN

Debemos escribir matricialmente la venta por semana de frutas a cada mercado, para esto se conforman las matrices A_1 , A_2 , A_3 y A_4 que representan las semanas del mes de enero.

$$A_1 = \begin{matrix} & \begin{matrix} m & d & p \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 100 & 200 & 120 \\ 120 & 250 & 180 \\ 80 & 75 & 95 \end{bmatrix} & \begin{matrix} \text{El Baratillo} \\ \text{El Ahorro} \\ \text{El Popular} \end{matrix} \end{matrix} \quad \begin{matrix} \\ \\ 3 \times 3 \end{matrix}$$

$$A_2 = \begin{matrix} & \begin{matrix} m & d & p \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 100 & 200 & 120 \\ 120 & 250 & 180 \\ 80 & 75 & 95 \end{bmatrix} & \begin{matrix} \text{El Baratillo} \\ \text{El Ahorro} \\ \text{El Popular} \end{matrix} \end{matrix} \quad \begin{matrix} \\ \\ 3 \times 3 \end{matrix}$$

$$A_3 = \begin{array}{ccc} & m & d & p \\ \begin{bmatrix} 120 & 220 & 140 \\ 140 & 270 & 200 \\ 100 & 95 & 115 \end{bmatrix}_{3 \times 3} & \begin{array}{l} \text{El Baratillo} \\ \text{El Ahorro} \\ \text{El Popular} \end{array} \end{array}$$

$$A_4 = \begin{array}{ccc} & m & d & p \\ \begin{bmatrix} 100 & 100 & 100 \\ 100 & 100 & 100 \\ 100 & 100 & 100 \end{bmatrix}_{3 \times 3} & \begin{array}{l} \text{El Baratillo} \\ \text{El Ahorro} \\ \text{El Popular} \end{array} \end{array}$$

Donde:

m : Cantidad de *manzanas*.

d : Cantidad de *duraznos*.

p : Cantidad de *peras*.

Para determinar la cantidad total de frutas vendidas a los mercados durante el mes de enero se procede a efectuar la operación de suma de matrices.

$$B = A_1 + A_2 + A_3 + A_4$$

$$B = \begin{bmatrix} 420 & 720 & 480 \\ 480 & 870 & 660 \\ 360 & 345 & 405 \end{bmatrix}$$

Los resultados de la matriz B , significan que José vendió durante el mes de enero al mercado *el Baratillo* 420 *manzanas*, 720 *duraznos* y 480 *peras*. Al mercado *El Ahorro* le comercializó 480 *manzanas*, 870 *duraznos* y 660 *peras*, mientras que al mercado *El Popular* se comercializó 360 *manzanas*, 345 *duraznos* y 405 *peras*.

Para calcular la venta en dólares utilizamos el producto de matrices, para esto debemos primero encontrar la matriz de precio por variedad de fruta, como se muestra a continuación:

$$C = \begin{array}{ccc} \$ & & \\ \begin{bmatrix} 0,20 \\ 0,15 \\ 0,25 \end{bmatrix}_{3 \times 1} & \begin{array}{l} \text{manzanas} \\ \text{duraznos} \\ \text{peras} \end{array} \end{array}$$

Los elementos de C , representan por variedad de fruta, el precio en dólares.

Ahora la venta en dólares será: $D = B \cdot C$

$$D = \begin{bmatrix} 420 & 720 & 480 \\ 480 & 870 & 660 \\ 360 & 345 & 405 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0,20 \\ 0,15 \\ 0,25 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 312 \\ 391,5 \\ 225 \end{bmatrix}$$

Los elementos de la matriz D representan por mercado el ingreso en dólares al mes que José obtiene por la venta de cada producto comercializado, es decir: \$312, \$391,5 y \$225 respectivamente.

PROBLEMA 1.12

Dos bodegas desean comprar papas de tres calibres diferentes. La bodega *Fertipapa* desea comprar 300 *sacos de tercera*, 400 *de segunda* y 200 *de primera*. *Andescampo* requiere comprar 200 *sacos de tercera*, 500 *de segunda* y 300 *primera*. El proveedor 1 vende los *sacos de tercera, segunda y primera* a: \$5, \$8 y \$10 respectivamente, mientras el distribuidor 2 comercializa el producto según la calidad en: \$4, \$8 y \$11. Determine desde el punto de vista económico en dólares ¿Cuál es el distribuidor de productos más conveniente para las bodegas?

SOLUCIÓN

Procedemos a formar las matrices A , B y C . Los elementos de A indican por cada bodega la cantidad de sacos de papas según calibre, mientras las matrices B y C muestran por calibre el precio en dólares según cada proveedor.

$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} st & ss & sp \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 300 & 400 & 200 \\ 200 & 500 & 300 \end{bmatrix}_{2 \times 3} & \begin{matrix} Fertipapa \\ Andescampo \end{matrix} \end{matrix} \quad B = \begin{matrix} & \begin{matrix} \$prov 1 & \$prov 2 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 5 \\ 8 \\ 10 \end{bmatrix}_{3 \times 1} & \begin{matrix} st \\ ss \\ sp \end{matrix} \end{matrix} \quad C = \begin{matrix} & \begin{matrix} \$prov 2 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \\ 11 \end{bmatrix}_{3 \times 1} & \begin{matrix} st \\ ss \\ sp \end{matrix} \end{matrix}$$

Donde:

st : Cantidad de *sacos de tercera*.

ss : Cantidad de *sacos de segunda*.

sp : Cantidad de *sacos de primera*.

Para determinar cuál de los distribuidores del producto es más conveniente para las bodegas efectuamos la operación del producto de matrices.

$$D = A \cdot B = \begin{bmatrix} 300 & 400 & 200 \\ 200 & 500 & 300 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ 8 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6700 \\ 8000 \end{bmatrix}$$

$$E = A \cdot C = \begin{bmatrix} 300 & 400 & 200 \\ 200 & 500 & 300 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \\ 11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6600 \\ 8100 \end{bmatrix}$$

De acuerdo con los resultados los elementos de las matrices D y E , muestran por bodega el costo total de los productos, esto se traduce a los siguiente: a la bodega *Fertipapa* le conviene económicamente *el proveedor 2*, porque: $\$6600 < \6700 , pero la bodega *Andescampo* le es más conveniente *el proveedor 1*, dado que: $\$8000 < \8100 .

Cabe destacar que esta operación puede también ser realizada construyendo una matriz F de orden 3×2 cuya filas y columnas sean B y C , donde las filas representan las bodegas *Fertipapa* y *Andescampo* y las columnas el costo del producto en dólares por *proveedor*, de esta manera los resultados serían:

$$G = A \cdot F = \begin{bmatrix} 300 & 400 & 200 \\ 200 & 500 & 300 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 8 & 8 \\ 10 & 11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6700 & 6600 \\ 8000 & 8100 \end{bmatrix}$$

Observamos que las filas de esta matriz G indican las Bodegas *Fertipapa* y *Andescampo*, mientras las columnas los *proveedores 1* y *2*, es decir; la bodega *Fertipapa* le es conveniente el *proveedor 2* porque: $\$6600 < \6700 y a la bodega *Andescampo* le es conveniente el *proveedor 1*, dado que: $\$8000 < \8100 .

PROBLEMA 1.13

Un supermercado vende 120 kg de *papas*, 80 kg de *yuca* y 20 kg de *tomates* durante *el viernes*. *El sábado* vende 80 kg de *papas*, 70 kg

de *yuca* y 25 kg de *tomates*. Si los precios por kg son; \$0,50, \$1,50, y \$1,00, respectivamente. Determine:

1. Una matriz que identifique la venta de *papas*, *yuca* y *tomates* durante *el viernes* y *sábado*.
2. El ingreso en dólares generado por la venta de los productos durante los días *viernes* y *sábado*.

SOLUCIÓN

Para responder a la pregunta 1. Procedemos formar una matriz que llamaremos A , cuyos elementos muestran por día (*viernes* y *sábado*) la cantidad en kilogramos de *papas*, *yuca* y *tomates* vendidos.

$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} p & y & t \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 120 & 80 & 20 \\ 80 & 70 & 25 \end{bmatrix} & \begin{matrix} v \\ s \end{matrix} \end{matrix}_{2 \times 3}$$

Donde:

p : Kilogramos de *papa*.

y : Kilogramos de *yuca*.

t : Kilogramos de *tomate*.

v : *Viernes*.

s : *Sábado*.

Para calcular el ingreso en dólares por la venta de los productos, primero es necesario construir la matriz B , cuyos elementos muestran por producción de tubérculo y verdura, el precio en dólares por unidad.

$$B = \begin{matrix} \$ \\ \begin{bmatrix} 0,50 \\ 1,50 \\ 1,00 \end{bmatrix} & \begin{matrix} p \\ y \\ t \end{matrix} \end{matrix}_{3 \times 1}$$

Seguidamente efectuamos la operación del producto de matrices, es decir $C = A \cdot B$, como se muestra a continuación:

$$C = A \cdot B = \begin{bmatrix} 120 & 80 & 20 \\ 80 & 70 & 25 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0,50 \\ 1,50 \\ 1,00 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 200 \\ 170 \end{bmatrix}$$

Los elementos de la matriz C , indican por día el ingreso en dólares, esto significa, que la retribución durante los *viernes y sábados* es de: \$200 y \$170 respectivamente.

Determinantes

En esta sección estaremos hablando del determinante de una matriz, el cual tiene múltiples aplicaciones dentro y fuera de las matemáticas. Veremos algunas aplicaciones geométricas dentro de la actividad agropecuaria, y además nos apoyaremos en ellos para resolver los sistemas de ecuaciones lineales enfocados a las actividades agropecuarias que estudiaremos en la siguiente unidad. Veremos que es posible usar esta herramienta para calcular el área de un paralelogramo o el volumen de un paralelepípedo. Sin embargo, solo nos concentraremos en sus aplicaciones directas y no en las definiciones más formales del determinante, pero si el lector quiere profundizar en aspectos más abstractos del determinante puede hacerlo consultando a Vera De Payer y Dimitroff (2020) en la obra *Álgebra lineal: Teoría, práctica y aplicaciones*.

Cuando hablamos de un **determinante**, fuera de cualquier contexto, termina siendo un número real único asignado a cada matriz cuadrada (Estruch *et al.*, 2017; Vera De Payer y Dimitroff, 2020). Ahora bien, para poder obtener este número (el determinante) será necesario aplicar algunas técnicas y procedimientos que iremos describiendo en las siguientes páginas y cuando hayamos aprendido a calcularlo estaremos preparados para resolver nuestros problemas geométricos y sistemas de ecuaciones lineales que involucran actividades agropecuarias.

Notación para los determinantes

Como hemos mencionado antes, el determinante es un *único número real asignado para cada matriz cuadrada* (Agud y Pla-Ferran-

do, 2020; Vera De Payer y Dimitroff, 2020). Así que definamos una notación para este número real.

Si tenemos una matriz $A \in M_{n \times n}$ entonces su determinante puede representarse indistintamente de tres formas:

$$\det[A] = |A| = \Delta A$$

Por ejemplo, si tenemos la matriz $A = \begin{bmatrix} 7 & -1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$, su determinante se puede representar por: $\det[A] = \det \begin{bmatrix} 7 & -1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$ o bien podemos escribir $|A| = \left| \begin{bmatrix} 7 & -1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \right|$, sin embargo, cuando usamos esta segunda notación es usual omitir los corchetes que encierran la matriz y solo dejar las barras del determinante, es decir, $|A| = \begin{vmatrix} 7 & -1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}$.

También podemos escribir $\Delta A = \begin{vmatrix} 7 & -1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}$.

Es importante que podamos distinguir cuándo nos referimos a una matriz y cuándo a un determinante. Veamos el ejemplo de una matriz de orden 3×3 :

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \\ -1 & 5 & 3 \end{bmatrix} \text{ (esta es la matriz)}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \\ -1 & 5 & 3 \end{vmatrix} \text{ (esta es la forma de representar el determinante de } A \text{)}$$

Calcular el determinante de una matriz de orden 2×2

Empecemos calculando el determinante de una matriz de orden 2×2 . Para ello, consideremos la matriz $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, entonces el determinante de A lo encontramos de la siguiente manera (Agud y Pla-Ferrando, 2020):

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

EJERCICIO 1.7

Si queremos calcular el determinante de la matriz $A = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 2 & 8 \end{bmatrix}$ escribimos lo siguiente:

$$\begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = 5 \cdot 8 - (-3) \cdot 2 = 46$$

$$|A| = 46$$

Como puede notarse, hacer el cálculo del determinante de una matriz de orden 2×2 es muy sencillo. Veamos cómo hacerlo para una matriz de orden 3×3 .

Calcular un determinante de una matriz de orden 3×3

Para calcular el determinante de una matriz de orden 3×3 aplicaremos un método conocido como **Regla de Sarrus** en honor a **Pierre Frédéric Sarrus** quien en 1833 lo introdujo en el artículo *Nouvelles méthodes pour la résolution des équations* (nuevos métodos para resolver ecuaciones).

Explicuemos en detalle la Regla de Sarrus:

Supongamos que tenemos una matriz de orden 3×3 y queremos calcular su determinante:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

La Regla de Sarrus nos indica que tomemos las primeras dos filas y las agreguemos al final de la matriz y así ampliar nuestro determinante con una matriz de 5 filas y 3 columnas tal como se indica a continuación:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

Luego vamos a sumar los productos de las diagonales descendientes (en azul) y restarle el producto de las diagonales ascendientes (en naranja):

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= (a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{13} + a_{31} \cdot a_{12} \cdot a_{23}) -$$

$$(a_{31} \cdot a_{22} \cdot a_{13} + a_{11} \cdot a_{32} \cdot a_{23} + a_{21} \cdot a_{12} \cdot a_{33})$$

Veamos un ejercicio para aclarar esta idea.

EJERCICIO 1.8

Calcule el siguiente determinante aplicando la regla de Sarrus:

$$\begin{vmatrix} 2 & 6 & 3 \\ -1 & 5 & -8 \\ 2 & -4 & -7 \end{vmatrix}$$

SOLUCIÓN

Primero agregamos las filas 1 y 2 para conseguir ahora 5 filas y 3 columnas:

$$\begin{vmatrix} 2 & 6 & 3 \\ -1 & 5 & -8 \\ 2 & -4 & -7 \\ 2 & 6 & 3 \\ -1 & 5 & -8 \end{vmatrix}$$

Ahora vamos a multiplicar las diagonales descendientes y las ascendientes para luego restar estos productos.

$$\begin{vmatrix} 2 & 6 & 3 \\ -1 & 5 & -8 \\ 2 & -4 & -7 \\ 2 & 6 & 3 \\ -1 & 5 & -8 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{aligned} & [2 \cdot 5 \cdot (-7) + (-1) \cdot (-4) \cdot 3 + 2 \cdot 6 \cdot (-8)] - \\ & [3 \cdot 5 \cdot 2 + (-8) \cdot (-4) \cdot 2 + (-7) \cdot 6 \cdot (-1)] = \\ & -154 - 136 = -290 \end{aligned}$$

La Regla de Sarrus tiene algunas variantes que en esencia terminan siendo lo mismo. Por ejemplo, en lugar de agregar las dos primeras filas al final también podríamos agregar las primeras dos columnas a la derecha y así obtener tres filas y cinco columnas para luego repetir el mismo procedimiento ya explicado anteriormente. El lector puede demostrar fácilmente con el ejemplo anterior que el resultado será el mismo.

Veamos cómo proceder para calcular el determinante de una matriz de orden 4×4 o superior.

Calcular un determinante de una matriz de orden 4×4 o superior

Para desarrollar este punto vamos a definir antes algunos conceptos que necesitaremos:

Sea $A \in M_n(R)$, entonces definimos la **matriz menor** del elemento a_{ij} (y la denotamos como M_{ij}) como la matriz de orden $(n-1) \times (n-1)$ obtenida de la matriz cuadrada A al eliminar los elementos de la i -ésima fila y los de la j -ésima columna. Veamos un ejemplo para entender mejor esta definición.

EJEMPLO 1.12

Sea la matriz $A = \begin{bmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \\ -1 & 5 & 3 \end{bmatrix}$, entonces la matriz menor M_{12} es la que se obtiene de eliminar de la matriz A los elementos de la fila 1 y de la columna 2, esto es:

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \\ -1 & 5 & 3 \end{bmatrix} \text{ obteniendo,}$$

$$M_{12} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

Del mismo modo podemos determinar la matriz menor M_{23} :

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \\ -1 & 5 & 3 \end{bmatrix} \text{ obteniendo, } M_{23} = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}.$$

Ahora definamos el **cofactor** (o adjunto) del elemento a_{ij} (denotado por C_{ij}) como un número real descrito como:

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} \det(M_{ij})$$

En esta expresión nos encontramos dos factores: el primer es $(-1)^{i+j}$ que representa el signo positivo o negativo según la suma en el exponente sea par o impar respectivamente. El segundo factor es $\det(M_{ij})$ que representa el determinante de la matriz menor.

Calculemos dos cofactores de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \\ -1 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$

$$C_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ -1 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= -(-15 - 2) = 17$$

$$C_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}$$

Hemos calculado el cofactor C_{23} y el cofactor C_{31} , en el primer caso tuvimos que multiplicar por -1 al determinante de la matriz menor correspondiente porque la suma de los subíndices (2 y 3) resultó impar (5) mientras en el segundo caso solo tuvimos que multiplicar por 1 porque la suma en el exponente fue par.

Teniendo clara la definición de los cofactores podemos comenzar a calcular los determinantes usando el **método por cofactores**.

Comencemos con el ejemplo de una matriz de orden 4x4 para explicar este método.

EJERCICIO 1.9

Calculemos el siguiente determinante:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & -2 & 0 \\ 2 & -3 & 0 & 0 \\ -3 & -3 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

SOLUCIÓN

El método consiste en *seleccionar cualquier fila (o columna) y multiplicar todos sus elementos por sus respectivos cofactores y luego sumarlos*.

Para este ejemplo tomaremos la fila tres y multiplicaremos cada elemento de esta fila por su respectivo cofactor:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & -2 & 0 \\ \color{red}{2} & \color{red}{-3} & \color{red}{0} & \color{red}{0} \\ -3 & -3 & 2 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 & -4 \\ -1 & -2 & 0 \\ -3 & 2 & 0 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 & -4 \\ 2 & -2 & 0 \\ -3 & 2 & 0 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \\ -3 & -3 & 0 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \\ -3 & -3 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$2 \cdot 32 + 3 \cdot 8 + 0 \cdot 36 - 0 \cdot (-28) =$$

$$64 + 24 + 0 - 0 = 88$$

$$\text{Por lo tanto, } \begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & -2 & 0 \\ 2 & -3 & 0 & 0 \\ -3 & -3 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 88$$

Con respecto a este método es importante hacer énfasis en el cuidado que debemos tener con los signos de los cofactores, observe que el signo del elemento $a_{32} = -(-3) = 3$ ha cambiado de signo, esto es debido al signo del cofactor que es negativo porque la suma de 3 y 2 es impar, tal como se explicó antes.

Por otro lado, el lector debe ser cuidadoso al seleccionar la fila (o columna) que utilizará, ya que los cálculos pueden simplificarse (o complicarse) significativamente según nuestra elección. Observemos que al elegir a la tercera fila hubo dos términos que se anularon y no había necesidad de calcular estos determinantes de orden 3×3 , es decir, bastaba con calcular solo dos determinantes de orden 3×3 . Sin embargo, si hubiéramos elegido la columna 4, solo teníamos que resolver un determinante 3×3 tal como vemos a continuación:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & -2 & 0 \\ 2 & -3 & 0 & 0 \\ -3 & -3 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -4 \cdot (-1) \begin{vmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 2 & -3 & 0 \\ -3 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 4 \cdot 22 = 88$$

Nuevamente, observa que el -1 que multiplica al -4 es debido a la posición de este.

Uso del determine para calcular áreas

Los determinantes de orden 2×2 tienen una interpretación gráfica que nos permitirá encontrar el área de un paralelogramo que se define a partir del origen de plano cartesiano y dos puntos cualesquiera.

TEOREMA 1.1

Sean los puntos con coordenadas $O(0,0)$, $P(a,b)$ y $Q(c,d)$ entonces el área del paralelogramo determinado por los vértices O , P y Q viene dado por:

$$A = \left| \det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \right|$$

Nota: Las barras indican el valor absoluto del determinante.

EJERCICIO 1.10

Sean los puntos $O(0,0)$, $P(1,3)$ y $Q(6,2)$.

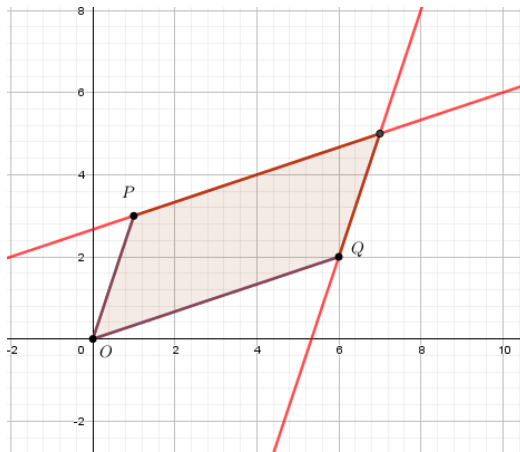
- Grafique el paralelogramo que determinan los puntos O , P , y Q .
- Calcule el área del paralelogramo graficado en el literal anterior.

SOLUCIÓN

- Para graficar el paralelogramo ubicamos los puntos P y Q sobre el plano cartesiano. Luego, trazamos una recta paralela al segmento $\overline{OQ}$ y que pase por P . Del mismo modo, trazamos una recta paralela al segmento $\overline{OP}$ y que pase por Q , la intersección de estas dos rectas será el cuarto vértice del paralelogramo. La figura 1.1 muestra el paralelogramo que se forma:

Figura 1.1

Representación gráfica del paralelogramo formado con los puntos O , P , Q



- El área del paralelogramo viene dado por:

$$A = \left| \det \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 6 & 2 \end{bmatrix} \right|$$

$$A = |2 - 18|$$

$$A = |-16|$$

$$A = 16$$

Luego, el área del paralelogramo viene dado por 16 unidades cuadradas.

Observe que si quiere calcular el área del triángulo que forma el origen con los puntos $P(a,b)$ y $Q(c,d)$ basta con dividir por 2 el área del triángulo.

PROBLEMA 1.14

En una hacienda, la superficie de un tanque para almacenamiento de agua está representada por un paralelogramo que se forma a partir del origen de plano cartesiano y los puntos $A(5,2)$ y $B(7,12)$. Determine:

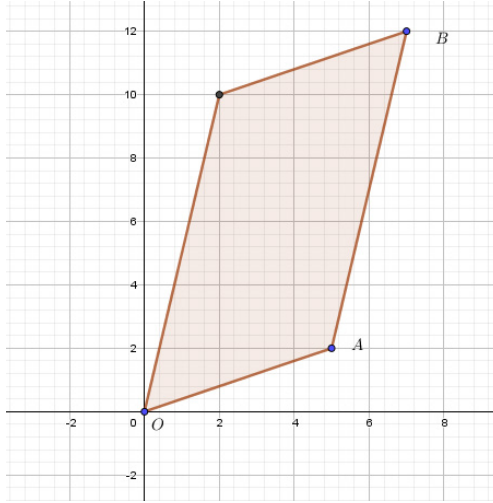
- El gráfico de la superficie del tanque representada por el paralelogramo.
- El volumen del tanque, si la altura es de $1,25 \text{ m}$.
- Determine la cantidad de tanqueros que habrá que comprar para llenar en su totalidad el tanque si cada camión tiene una capacidad de $6 \frac{\text{m}^3}{\text{camión}}$

SOLUCIÓN

- El gráfico del paralelogramo se muestra en la figura 1.2

Figura 1.2

Representación gráfica del paralelogramo que se forma con el origen del plano cartesiano y los puntos A (5,2) y B (7,12)



- b. Para calcular el volumen del tanque, calcularemos primero el área de la superficie del tanque representada por el paralelogramo mediante la ecuación:

$$A = \left| \det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \right|$$

Donde:

a : Es la coordenada x del punto A

b : Es la coordenada y del punto A.

c : Es la coordenada x del punto B.

d : Es la coordenada y del punto B.

Sustituyendo valores

$$A = \left| \det \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 12 \end{bmatrix} \right|$$

$$A = |60 - 14|$$

$$A = |46|$$

$$A = 46$$

Por lo tanto, el área de la superficie del tanque representada por el paralelogramo es de 46 m^2

- b Ahora, el volumen del tanque de almacenamiento de agua será:

$$V_{\text{tanque}} = A \cdot h$$

Donde:

V_{tanque} : Es el volumen del tanque

A : Es el área de la superficie del tanque.

h : Es la altura del tanque.

Sustituyendo valores

$$V_{\text{tanque}} = 46 \cdot 1,25$$

$$V_{\text{tanque}} = 57,5$$

Es decir, el volumen del tanque es de $57,5 \text{ m}^3$

- c. Para calcular la cantidad de tanqueros que habrá que comprar para llenar en su totalidad el tanque, dividimos el volumen del tanque entre el volumen de cada camión, es decir:

$$C_{\text{tanqueros}} = \frac{V_{\text{tanque}}}{V_{\text{tanquero}}}$$

Donde:

$C_{\text{tanqueros}}$: Es cantidad de tanqueros.

V_{tanque} : Es el volumen del tanque.

V_{tanquero} : Es el volumen de cada tanquero.

Sustituyendo valores

$$C_{\text{tanqueros}} = \frac{57,5}{6}$$

$$C_{\text{tanqueros}} = 9,58$$

Por lo tanto, habrá que comprar aproximadamente 10 tanqueros para llenar por completo el tanque.

Veamos ahora cómo calcular el área de un triángulo conociendo sus tres vértices con la ayuda de un determinante de orden 3×3 .

TEOREMA 1.2

Sean los puntos $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$ y $R(x_3, y_3)$ los vértices de un triángulo, entonces su área viene dada por:

$$A = \frac{1}{2} \left| \det \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{bmatrix} \right|$$

Nota: De nuevo las barras indican el valor absoluto del determinante.

EJERCICIO 1.11

Calcule el área del triángulo formado los puntos $P(1,3)$, $Q(-2,4)$ y $R(-5,2)$.

El área del triángulo PQR viene dado por:

$$A = \frac{1}{2} \left| \det \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -2 & 4 & 1 \\ -5 & 2 & 1 \end{bmatrix} \right|$$

Aplicando la regla de Sarrus tenemos:

$$A = \frac{1}{2} |(1 \cdot 4 \cdot 1 + (-2) \cdot 2 \cdot 1 + (-5) \cdot 1 \cdot 3) - (1 \cdot 4 \cdot (-5) + 1 \cdot 2 \cdot 1 + 1 \cdot (-2) \cdot 3)|$$

$$A = \frac{1}{2} |(4 - 4 - 15) - (-20 + 2 - 6)|$$

$$A = \frac{1}{2} |(-15) - (-24)|$$

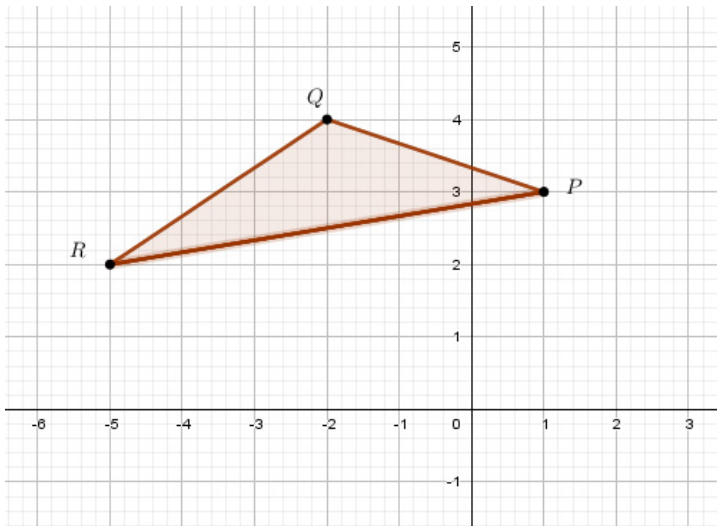
$$A = \frac{1}{2} |9|$$

$$A = 4,5$$

Por lo tanto, el área del triángulo PQR es de 4,5 unidades cuadradas. La figura 1.3 muestra un gráfico del ejercicio:

Figura 1.3

Representación gráfica del triángulo que se forma con los puntos $P(1,3)$, $Q(-24)$, y $R(-5,2)$



PROBLEMA 1.15

La superficie de una parcela está representada por un triángulo cuyas coordenadas de los vértices son los puntos $A(5,8)$, $B(10,20)$ y

$C(30,6)$, considere que las unidades de medidas de los puntos están en metros. Determine el área de la superficie.

SOLUCIÓN

Como la parcela tiene forma triangular entonces podemos calcular su área de la misma manera que lo hicimos en el ejercicio 1.11:

$$A = \frac{1}{2} \left| \det \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & x_2 & 1 \\ x_3 & x_3 & 1 \end{bmatrix} \right|$$

$$A = \frac{1}{2} \left| \det \begin{bmatrix} 5 & 8 & 1 \\ 10 & 20 & 1 \\ 30 & 6 & 1 \end{bmatrix} \right|$$

$$A = \frac{|-310|}{2} = 115 \text{ m}^2$$

Luego, el área de la superficie es de 115 m^2

El lector podrá notar que a partir de tres puntos cualesquiera que formen un triángulo, siempre es posible formar un paralelogramo tal como lo hicimos con el primer ejercicio de este apartado. Por lo tanto, podemos deducir fácilmente el siguiente teorema:

TEOREMA 1.3

El paralelogramo que determinan los puntos $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$ y $R(x_3, y_3)$ tiene un área igual a:

$$A = \left| \det \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & x_2 & 1 \\ x_3 & x_3 & 1 \end{bmatrix} \right|$$

EJERCICIO 1.12

Determine el área del paralelogramo que forman los puntos $P(1, -2)$, $Q(3, 4)$, y $R(5, -4)$.

SOLUCIÓN

El área del paralelogramo viene dada por:

$$A = \left| \det \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 5 & -4 & 1 \end{bmatrix} \right|$$

$$A = |((4 - 12 - 10) - (20 - 4 - 6))|$$

$$A = |-18 - 10|$$

$$A = |-28|$$

$$A = 28 \text{ unidades cuadradas.}$$

Propiedades de los determinantes

Estudiemos algunas propiedades que cumplen los determinantes y que son muy útiles al momento de resolver algunos determinantes, en este texto hemos tratado de evitar una notación formal que pueda confundir al estudiante, pero para lectores más curiosos se invita a revisar Vera De Payer y Dimitroff (2020).

1) *EL DETERMINANTE DE UNA MATRIZ CON DOS FILAS O COLUMNAS IGUALES O PROPORCIONALES ES CERO.*

EJEMPLO 1.13

Hallar el determinante de la matriz A .

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

SOLUCIÓN

Observe que las filas 2 y 3 de la matriz son iguales, aplicando la propiedad *i*, el determinante de A es igual a cero. *Verifíquelo.*

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

EJEMPLO 1.14

Hallar el determinante de la matriz A .

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -2 & 5 & -6 \\ 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

SOLUCIÓN

En este caso observe que la columna 3 es múltiplo escalar de la columna 1, es decir la columna 3 es la columna 1 multiplicada por 3, en este caso aplicando la propiedad *i*, el determinante de A es igual a cero. *Verifíquelo.*

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -2 & 5 & -6 \\ 0 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

EJEMPLO 1.15

Hallar el determinante de la matriz B .

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

SOLUCIÓN

Si observamos la matriz podemos notar que las columnas 1 y 3 son iguales, aplicando la propiedad *i*, el determinante de B es igual a cero. *Compruebe el resultado.*

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

EJEMPLO 1.16

Hallar el determinante de la matriz C .

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -4 & -5 \\ 3 & 4 & 3 & -5 & 9/2 \\ 2 & 3 & 2 & -3 & 7/8 \\ 1 & 2 & 1 & 4/3 & 4 \\ 5 & 1 & 5 & 5/4 & 5 \end{bmatrix}$$

SOLUCIÓN

Observe que la matriz C , es de orden 5×5 , calcular el determinante es un proceso largo y tedioso, de hecho, no puede aplicarse la Regla de Sarrus, tendríamos que resolver el determinante de la matriz aplicando cofactores. Sin embargo, usando la propiedad **i**, el determinante de la matriz C es cero, porque las columnas 1 y 3 son iguales, es decir $|C| = 0$

II) EL DETERMINANTE DE LA SUMA O RESTA DE DOS O MÁS MATRICES ES DISTINTO A LA SUMA O RESTA DEL DETERMINANTE DE CADA MATRIZ.

EJEMPLO 1.17

Dadas las matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 10 & 3 \\ -2 & 15 & 6 \\ 3 & -10 & 4 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & 7 \\ 5 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

SOLUCIÓN

El $|A + B|$ es:

$$|A + B| = \begin{vmatrix} 6 & 11 & 6 \\ -4 & 16 & 13 \\ 8 & -11 & 8 \end{vmatrix} = 2618$$

Calculemos $|A|$ y $|B|$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 10 & 3 \\ -2 & 15 & 6 \\ 3 & -10 & 4 \end{vmatrix} = 305 \quad |B| = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & 7 \\ 5 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 89$$

$$|A + B| \neq |A| + |B| = 2618 \neq (305 + 89)$$

EJEMPLO 1.18

Dadas las matrices A y B .

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 10 & 3 \\ -2 & 15 & 6 \\ 3 & -10 & 4 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & 7 \\ 5 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

SOLUCIÓN

El $|A - B|$ es:

$$|A - B| = \begin{vmatrix} -4 & 9 & 0 \\ 0 & 14 & -1 \\ -2 & -9 & 0 \end{vmatrix} = 54$$

Calculemos $|A|$ y $|B|$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 10 & 3 \\ -2 & 15 & 6 \\ 3 & -10 & 4 \end{vmatrix} = 305 \quad |B| = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & 7 \\ 5 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 89$$

$$|A - B| \neq |A| - |B| = 54 \neq (305 - 89)$$

III) *EL DETERMINANTE DE UNA MATRIZ CON UNA FILA O COLUMNA NULA ES CERO.*

EJEMPLO 1.19

Hallar el determinante de la matriz A .

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -2 & 0 & 6 \\ 3 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

SOLUCIÓN

La matriz A tiene una columna con elementos todos cero, es decir es una columna nula, aplicando la propiedad *iii*, el determinante es cero. *Verifique el resultado*

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -2 & 0 & 6 \\ 3 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

EJEMPLO 1.20

Hallar el determinante de la matriz D .

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 6 \\ 3 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

SOLUCIÓN

La matriz D tiene una fila con elementos todos ceros, es decir una fila nula, aplicando la propiedad *iii*, el determinante es cero.

$$|D| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 6 \\ 3 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 0 \text{ Verifíquelo}$$

IV) *EL DETERMINANTE DE UNA MATRIZ EN LA QUE UNA FILA O COLUMNA DEPENDE LINEALMENTE DE OTRA FILA O COLUMNA ES CERO.*

EJEMPLO 1.21

Hallar el determinante de la matriz E .

$$E = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

SOLUCIÓN

Observemos las columnas 3 y 1. La comuna 3 es igual a dos veces la columna 1 menos la columna 2, es decir $C_3 = 2C_1 - C_2$, aplicando la propiedad *iv*, el determinante de la matriz es cero. *Compruebe el resultado.*

$$|E| = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 3 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 0$$

V) *EL DETERMINANTE DE UNA MATRIZ DIAGONAL O TRIANGULAR (SUPERIOR O INFERIOR) ES IGUAL AL PRODUCTO DE LOS ELEMENTOS DE SU DIAGONAL PRINCIPAL.*

EJEMPLO 1.22

Hallar el determinante de la matriz F .

$$F = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

SOLUCIÓN

Observemos que la matriz F es una matriz diagonal, luego el determinante es el producto de los elementos de la diagonal principal, es decir:

$$|F| = \begin{vmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 48$$

EJEMPLO 1.23

Hallar el determinante de la matriz A .

$$A = \begin{bmatrix} -4 & 1 & 4 \\ 0 & 12 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

SOLUCIÓN

Observemos la matriz A es una matriz triangular superior el determinante es el producto de los elementos de la diagonal principal, es decir:

$$|A| = \begin{vmatrix} -4 & 1 & 4 \\ 0 & 12 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 48$$

EJEMPLO 1.24

Hallar el determinante de la matriz B .

$$B = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 1 & 12 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

SOLUCIÓN

Observemos la matriz B es una matriz triangular inferior el determinante es el producto de los elementos de la diagonal principal, es decir:

$$|B| = \begin{vmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 1 & 12 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 48$$

VI) *SI SE INTERCAMBIAN ENTRE SÍ DOS FILAS (O DOS COLUMNAS) DE UNA MATRIZ, EL DETERMINANTE CAMBIA DE SIGNO.*

EJEMPLO 1.25

Hallar el determinante de las matrices:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 6 \\ 4 & 5 & 3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 3 \\ 2 & -1 & 6 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

SOLUCIÓN

Al calcular el determinante de A es:

$$|A| = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 6 \\ 4 & 5 & 3 \end{vmatrix} = 84$$

Ahora observemos que en la matriz B se han intercambiado las filas 1 y 3 de la matriz A , por lo tanto, el determinante cambia de signo. *Verifiquelo.*

$$|B| = \begin{vmatrix} 4 & 5 & 3 \\ 2 & -1 & 6 \\ -2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -84$$

EJEMPLO 1.26

Hallar el determinante de las matrices A y B .

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 5 & -1 & 6 \\ 4 & 5 & 3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 6 & -1 & 5 \\ 3 & 5 & 4 \end{bmatrix}$$

SOLUCIÓN

El determinante de A es:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 5 & -1 & 6 \\ 4 & 5 & 3 \end{vmatrix} = -57$$

Ahora observemos en la matriz B se han intercambiado las columnas 1 y 3 de la matriz A , el determinante cambia de signo.

$$|B| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 6 & -1 & 5 \\ 3 & 5 & 4 \end{vmatrix} = 57$$

vii) El determinante de la matriz unidad o identidad es 1.

EJEMPLO 1.27

Hallar el determinante de la matriz A .

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

SOLUCIÓN

Observemos que en ambos casos la matriz A es la matriz identidad, aún más, podemos ver que es una matriz diagonal. Luego, aplicando la propiedad *v* o *vii*, el determinante es 1.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \qquad |A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

VIII) Si a una fila o columna de una matriz, se suma una combinación lineal de otras filas o columnas, respectivamente, el valor de su determinante no varía.

EJEMPLO 1.28

Consideremos la matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 5 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}$. El determinante de A es:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 5 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -1$$

Ahora realicemos la operación con la tercera fila, esta ahora será la tercera fila más la primera multiplicada por -1 más la segunda multiplicada por 2, es decir: $f_3 \rightarrow f_3 + (-1)f_1 + 2f_2$, esto resulta:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 5 & 2 \\ 4 + (-1)(2) + (2)(1) & 2 + (-1)(-1) + (2)(5) & 3 + (-1)(1) + (2)(2) \end{vmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 5 & 2 \\ 4 & 13 & 6 \end{vmatrix} = -1 \text{ (Verifiquelo)}$$

EJEMPLO 1.29

Consideremos la matriz $A = \begin{bmatrix} 7 & -1 & 1 \\ 6 & 5 & 2 \\ 9 & 2 & 3 \end{bmatrix}$. El determinante de A es:

$$|A| = \begin{vmatrix} 7 & -1 & 1 \\ 6 & 5 & 2 \\ 9 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 44$$

Ahora realicemos la operación con la segunda columna, ahora esta será la columna dos más la primera multiplicada por 2, más la columna 3, es decir: $C_2 \rightarrow C_2 + 2C_1 + C_3$, esto resulta:

$$|A| = \begin{vmatrix} 7 & -1 + 2(7) + 1 & 1 \\ 6 & 5 + 2(6) + 2 & 2 \\ 9 & 2 + 2(9) + 3 & 3 \end{vmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 7 & 14 & 1 \\ 6 & 19 & 2 \\ 9 & 23 & 3 \end{vmatrix} = 44 \quad (\text{Compruebe el resultado})$$

IX) *EL DETERMINANTE DEL PRODUCTO DE DOS MATRICES CUADRADAS ES IGUAL AL PRODUCTO DE LOS DETERMINANTES DE CADA UNA CADA MATRIZ.*

$$|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$$

EJEMPLO 1.30

Consideremos las matrices $A = \begin{bmatrix} 7 & 5 & 0 \\ 3 & 0 & -4 \\ 0 & 6 & 5 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

El producto $A \cdot B$ resulta:

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 7 & 5 & 0 \\ 3 & 0 & -4 \\ 0 & 6 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 17 & 7 \\ -19 & 3 & -17 \\ 26 & 12 & 25 \end{bmatrix}$$

Ahora, el determinante del producto de las matrices es:

$$|A \cdot B| = \begin{vmatrix} -2 & 17 & 7 \\ -19 & 3 & -17 \\ 26 & 12 & 25 \end{vmatrix} = -2139$$

Calculando $|A|$ y $|B|$ tenemos:

$$|A| = \begin{vmatrix} 7 & 5 & 0 \\ 3 & 0 & -4 \\ 0 & 6 & 5 \end{vmatrix} = 93 \quad |B| = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 5 \end{vmatrix} = -23$$

Luego, el producto de los determinantes de las matrices resulta:

$$|A| \cdot |B| = 93 \cdot (-23) = -2139$$

X) *EL PRODUCTO DEL DETERMINANTE DE UNA MATRIZ POR EL DETERMINANTE DE SU INVERSA ES 1.*

$$|A| \cdot |A^{-1}| = 1$$

EJEMPLO 1.31

Sean las matrices $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & 4 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$ y $A^{-1} = \begin{bmatrix} 4/9 & -1/9 & 7/9 \\ 2/9 & -1/18 & -1/9 \\ -1/9 & 5/18 & -4/9 \end{bmatrix}$

El valor de $|A|$ es:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & 4 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 18$$

Por lo tanto, el determinante de A^{-1} es:

$$|A^{-1}| = \begin{vmatrix} 4/9 & -1/9 & 7/9 \\ 2/9 & -1/18 & -1/9 \\ -1/9 & 5/18 & -4/9 \end{vmatrix} = 1/18$$

Verifique estos resultados con la Regla de Sarrus

XI) *EL DETERMINANTE DE UNA MATRIZ ES IGUAL AL DETERMINANTE DE SU TRASPUESTA.*

$$|A| = |A^t|$$

EJEMPLO 1.32

Consideremos las matrices $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 0 \\ -2 & 5 & 4 \\ -1 & 6 & -2 \end{bmatrix}$ y su traspuesta $A^t = \begin{bmatrix} 5 & -2 & -1 \\ 2 & 5 & 6 \\ 0 & 4 & -2 \end{bmatrix}$

Calculemos el determinante de A y A^t , esto resulta:

$$A = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -2 & 5 & 4 \\ -1 & 6 & -2 \end{vmatrix} = -186 \quad A^t = \begin{vmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 2 & 5 & 6 \\ 0 & 4 & -2 \end{vmatrix} = -186$$

XII) SI TODOS LOS ELEMENTOS DE UNA FILA O COLUMNA DE UNA MATRIZ A, SE MULTIPLICAN POR UN NÚMERO REAL K, SU DETERMINANTE ES K VECES EL DETERMINANTE DE A.

EJEMPLO 1.33

$$\text{Sea } A = \begin{bmatrix} 7 & 0 & -1 \\ 3 & -2 & -4 \\ -1 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

SOLUCIÓN

El valor de $|A|$ es:

$$|A| = \begin{vmatrix} 7 & 0 & -1 \\ 3 & -2 & -4 \\ -1 & 1 & 5 \end{vmatrix} = -43$$

Ahora multipliquemos la tercera fila de A por 3 resultando la matriz B :

$$B = \begin{bmatrix} 7 & 0 & -1 \\ 3 & -2 & -4 \\ -3 & 3 & 15 \end{bmatrix} \quad y \quad |B| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & -2 & -4 \\ -3 & 3 & 15 \end{vmatrix} = -129$$

Vemos que se verifica que $3 \cdot |A| = 3 \cdot (-43) = -129 = |B|$

EJEMPLO 1.34

Consideremos la matriz $A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & -1 \\ 9 & -2 & -4 \\ -11 & 1 & 5 \end{bmatrix}$. El determinante de A , es:

$$|A| = \begin{vmatrix} 5 & 0 & -1 \\ 9 & -2 & -4 \\ -11 & 1 & 5 \end{vmatrix} = -17$$

Ahora multipliquemos la segunda columna de A por 2, resultando la matriz B :

$$B = \begin{bmatrix} 5 & 0 & -1 \\ 9 & -4 & -4 \\ -11 & 2 & 5 \end{bmatrix} \quad |B| = \begin{vmatrix} 5 & 0 & -1 \\ 9 & -4 & -4 \\ -11 & 2 & 5 \end{vmatrix} = -34$$

$$\text{Es decir, } 2 \cdot |A| = 2 \cdot (-17) = -34 = |B|$$

XII) SI TODOS LOS ELEMENTOS DE UNA FILA (O COLUMNA) ESTÁN FORMADOS POR DOS SUMANDOS, DICHO DETERMINANTE SE DESCOMPONE EN LA SUMA DE DOS DETERMINANTES, DEJANDO LAS DEMÁS FILAS (O COLUMNAS) INVARIABLES.

EJEMPLO 1.35

Consideremos la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 4 \\ -1 & -4 & -2 \end{bmatrix}$ que puede reescribirse como

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -3 + 1 & 2 + 3 & 2 + 2 \\ -1 & -4 & -2 \end{bmatrix}$$

Luego el determinante de A , es:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 4 \\ -1 & -4 & -2 \end{vmatrix} = 48$$

O bien,

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -3 & 2 & 2 \\ -1 & -4 & -2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & -4 & -2 \end{vmatrix} = 48 + 0 = 48$$

EJEMPLO 1.36

Consideremos la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 4 \\ -1 & -4 & -2 \end{bmatrix}$ que puede reescribirse como

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -5 + 3 & 2 \\ -2 & 10 - 5 & 4 \\ -1 & -8 + 4 & -2 \end{bmatrix}$$

Luego el determinante de A es:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 4 \\ -1 & -4 & -2 \end{vmatrix} = 48$$

O bien,

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -5 & 2 \\ -2 & 10 & 4 \\ -1 & -8 & -2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -2 & -5 & 4 \\ -1 & -4 & -2 \end{vmatrix} = 104 - 56 = 48$$

Inversa de una matriz y el método de la adjunta

Estudiemos un poco sobre algunas matrices cuadradas que cuentan con una particularidad que nos permitirá resolver sistemas de ecuaciones lineales cuadrados en el capítulo 2. Ya estudiamos algunos tipos de matrices: cuadradas, diagonales, escalares, identidad, entre otras. Es momento de estudiar unas matrices cuadradas que llamaremos **invertibles**. En Estruch *et al.* (2017) puede encontrarse un enfoque más formal de este tipo de matrices.

Matrices invertibles

DEFINICIÓN 1.2

Diremos que una matriz $A \in M_n(R)$ es invertible si existe otra matriz $A^{-1} \in M_n(R)$ que cumpla con la condición $A \cdot A^{-1} = I = A^{-1} \cdot A$.

Resaltemos algunas observaciones de esta definición:

- Las matrices invertibles son cuadradas.
- La matriz inversa tiene el mismo orden de la matriz original.
- El producto de una matriz con su inversa es conmutativo y siempre resulta la identidad.
- No todas las matrices cuadradas son invertibles.
- La notación A^{-1} hace referencia a la inversa de la matriz, la cual será otra matriz, pero nunca puede confundirse con $\frac{1}{A}$

Sabiendo esto, surgen dos preguntas que debemos responder: ¿Cuándo sabemos si una matriz cuadrada tiene inversa? y en caso de existir la inversa ¿Cómo la calculamos?

¿CUÁNDO SABEMOS SI UNA MATRIZ CUADRADA TIENE INVERSA?

Para determinar si una matriz tiene inversa solo debemos calcular su determinante.

Sea $A \in M_n(R)$ entonces A es invertible si $\det(A) \neq 0$

En caso de que el determinante de A sea cero decimos que la matriz no tiene inversa.

Veamos un ejemplo.

EJERCICIO 1.13

Determinar si la matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & -5 & 3 \\ 2 & 3 & -2 \\ 2 & -13 & 8 \end{bmatrix}$ tiene inversa.

SOLUCIÓN

Para responder la pregunta calculamos el determinante de A :

$$\det [A] = \begin{vmatrix} 2 & -5 & 3 \\ 2 & 3 & -2 \\ 2 & -13 & 8 \end{vmatrix}$$

$$\det[A] = (48 - 78 + 20) - (18 + 52 - 80)$$

$$\det[A] = 0$$

Como el determinante de la matriz es cero decimos que la matriz no tiene inversa.

Ahora veamos otro ejemplo.

EJERCICIO 1.14

Determine si la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$ tiene inversa.

Para responder la pregunta calculamos el determinante de A :

$$\det [A] = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\det[A] = (-1 + 27 - 6) - (-3 + 6 - 9)$$

$$\det[A] = 26$$

Como el determinante que hemos obtenido es diferente de cero entonces podemos afirmar que esta matriz tiene inversa, y esto nos lleva a responder la siguiente pregunta:

¿CÓMO CALCULAR LA INVERSA DE UNA MATRIZ?

Para calcular la inversa de una matriz podemos aplicar diferentes técnicas, en este capítulo veremos cómo hacerlo por medio del método de la adjunta haciendo uso de los determinantes, en el siguiente capítulo estudiaremos una segunda técnica para hacerlo.

Método de la adjunta

Como hemos mencionado, una técnica de calcular la inversa de una matriz es haciendo uso de los determinantes aplicando el **método de la adjunta**.

Para ello, definiremos antes una matriz que conoceremos en adelante como **matriz adjunta**, que no es más que la matriz formada por los cofactores (o adjuntos) de los elementos de una matriz cuadrada (Agud y Pla-Ferrando, 2020).

Para el caso particular de una matriz de orden 3×3 , que usaremos con mayor frecuencia podemos construir la matriz adjunta como sigue:

DEFINICIÓN 1.3

Sea $A = (a_{ij}) \in M_n(R)$, entonces se define la **matriz adjunta** de A como:

$$adj[A] = (c_{ij}) \in M_n(R)$$

Donde $c_{ij} = (-1)^{i+j} \det(M_{ij})$, es decir, la matriz adjunta está formada por los cofactores de los elementos de la matriz original.

Para el caso particular de una matriz de orden 3×3 , que usaremos con mayor frecuencia podemos construir la matriz adjunta como sigue:

Si $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ entonces la matriz adjunta de A viene dada por:

$$adj[A] = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

Si ponemos atención notaremos que cada elemento de esta matriz corresponde al cofactor respectivo. De esta manera, podremos usar esta plantilla para organizar directamente los cofactores (o adjuntos) en la matriz que deseamos encontrar, la matriz adjunta.

Teniendo clara esta definición podemos encontrar la inversa de una matriz utilizando el método de la adjunta que estable lo siguiente:

TEOREMA 1.4

$$\text{Sea } A \in M_n(R) \text{ entonces } A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot (\text{adj}[A])^t$$

Fácilmente, el lector puede verificar que la adjunta de la traspuesta es igual a la traspuesta de la adjunta, es decir, $\text{adj}[A^t] = (\text{adj}[A])^t$. Esto implica que podamos utilizar también esta forma equivalente para hallar la inversa de una matriz A :

$$\text{Sea } A \in M_n(R) \text{ entonces } A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot (\text{adj}[A])^t$$

EJERCICIO 1.15

Encuentre la inversa de la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$.

SOLUCIÓN

- a. El primer paso es encontrar el determinante de la matriz:

$$\det[A] = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 26$$

- b. Luego debemos hallar todos los cofactores de la matriz A y ubicarlos en una misma matriz para así construir la matriz $\text{adj}[A]$. Para facilitar el trabajo utilizaremos la plantilla que mencionamos arriba:

$$adj[A] = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

Resolviendo los determinantes de orden 2×2 obtenemos:

$$adj[A] = \begin{bmatrix} -7 & 1 & 10 \\ 12 & 2 & -6 \\ 3 & 7 & -8 \end{bmatrix}$$

c. El siguiente paso será construir la traspuesta de la matriz adjunta:

$$adj[A] = \begin{bmatrix} -7 & 12 & 3 \\ 1 & 2 & 7 \\ 10 & -6 & -8 \end{bmatrix}$$

d. Finalmente, construimos la matriz inversa con la fórmula:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot (adj[A])^t$$

$$A^{-1} = \frac{1}{26} \cdot \begin{bmatrix} -7 & 12 & 3 \\ 1 & 2 & 7 \\ 10 & -6 & -8 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{-7}{26} & \frac{6}{13} & \frac{3}{26} \\ \frac{1}{26} & \frac{1}{13} & \frac{7}{26} \\ \frac{5}{13} & \frac{-3}{13} & \frac{-4}{13} \end{bmatrix}$$

Ejercicios y problemas propuestos

Ejercicios propuestos

1. Sean las matrices $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ $C = \begin{bmatrix} 0 & -5 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}$.

Determine:

- a. $A + B$
 - b. $A - C$
 - c. $2 \cdot A + B^t$
 - d. $-3 \cdot C + 2 \cdot A^t$
 - e. $3(C - 2 \cdot A)$
2. Sean las matrices $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -3 \\ 2 & 2 & 5 \end{bmatrix}$ $C = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 5 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$.

Determine:

- a. $A + B^t$
 - b. $B^t - C$
 - c. $2 \cdot A + 3 \cdot C$
 - d. $-2 \cdot (C^t + 2 \cdot A^t)$
 - e. $-3(-2 \cdot A + B^t)$
3. Determine cuáles de los siguientes productos de matrices existen. En caso de existir, resuelva la multiplicación.

- a. $\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & -5 \end{bmatrix}$
- b. $\begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \\ -5 & 3 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 5 \\ 0 & -5 & 3 \end{bmatrix}$
- c. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -5 & 0 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & 5 \\ 5 & -5 & 0 & 3 \end{bmatrix}$
- d. $\begin{bmatrix} -2 & -5 & 1 \\ 1 & -6 & 5 \\ -5 & 1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 \\ -2 & -5 & 3 \end{bmatrix}$
- e. $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 & 5 \\ 3 & -5 & 0 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 \\ -2 & -5 & 3 \\ 3 & 4 & -5 \\ -3 & 5 & 1 \end{bmatrix}$
- f. $\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -3 \\ 3 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & -5 \end{bmatrix}$
- g. $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & -5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 4 & -5 \\ 3 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$
- h. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 3 & -5 & 3 \\ -2 & 2 & -3 \\ 5 & 4 & -5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -5 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$
- i. $\begin{bmatrix} 5 & 1 & 5 \\ 2 & -5 & 3 \\ -5 & 3 & -7 \\ 4 & 2 & -6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 2 & -3 & 2 \\ 8 & -5 & -5 & 3 \\ -7 & -5 & -2 & 4 \end{bmatrix}$
- j. $\begin{bmatrix} -8 & -5 & 3 \\ 1 & 2 & -3 \\ -5 & 2 & -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 5 & -3 \\ 1 & 3 & -5 & 2 \end{bmatrix}$

4. Calcule los siguientes determinantes

a. $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & -3 \end{vmatrix}$

b. $\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ -3 & 2 \end{vmatrix}$

c. $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -5 & 6 & 2 \\ 5 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

d. $\begin{vmatrix} 5 & 3 & -2 \\ 3 & -5 & -4 \\ 5 & 4 & 0 \end{vmatrix}$

e. $\begin{vmatrix} 5 & -3 & 2 \\ -3 & 5 & -1 \\ 3 & 4 & 8 \end{vmatrix}$

f. $\begin{vmatrix} 5 & 3 & -2 \\ 3 & 0 & -4 \\ 8 & 3 & -6 \end{vmatrix}$

g. $\begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 & 5 \\ 3 & -5 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & 3 & -3 \\ 5 & 4 & 4 & -5 \end{vmatrix}$

h. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -3 & 3 \\ 0 & -2 & 0 & -3 \\ 5 & 4 & 0 & -5 \end{vmatrix}$

5. Calcule los determinantes de las siguientes matrices aplicando propiedades y escriba la propiedad que ha aplicado.

a. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & -4 & -5 \\ 3 & 4 & 3 & -5 & 9/2 \\ 2 & 3 & 2 & -3 & 7/8 \\ 1 & 2 & 5 & -4 & -5 \\ 5 & 1 & 5 & 5/4 & 5 \end{pmatrix}$

b. $B = \begin{pmatrix} -1 & 1/3 & 1/5 & -7 \\ 9 & 8 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

c. $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & 5 & 0 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$

d. $D = \begin{pmatrix} -3 & -2 & -4 \\ 0 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

e. $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

f. $F = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & -2 \\ 1 & -3 & 4 \end{pmatrix}$

g. $F^t = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 5 & -3 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$

6. Calcule el área del paralelogramo que se forma a partir del origen del plano y los puntos con coordenadas A y B . En cada caso realice el dibujo correspondiente.

a. $A(-1,4); B(2,-7)$

b. $A(8,14); B(-4,15)$

c. $A(11,-14); B(-12,9)$

d. $A(-1,9); B(-2,6)$

7. Calcule el área del triángulo que forman los puntos A , B y C . En cada caso realice el dibujo correspondiente.

e. $A(-1,4); B(2,7); C(-2,8)$ f. $A(0,14); B(-4,-25); C(12,8)$
 g. $A(-4,1); B(0,5); C(1,0)$ h. $A(1,-9); B(-2,6); C(-6,0)$

8. Determine si las siguientes matrices tienen inversa, en caso afirmativo calcúlela por el método de la adjunta.

i. $\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$

j. $\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$

k. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & -3 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

l. $\begin{bmatrix} -2 & -5 & 1 \\ -14 & -10 & 8 \\ -5 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

m. $\begin{bmatrix} -8 & -5 & 3 \\ 1 & 2 & -3 \\ -5 & 2 & -4 \end{bmatrix}$

n. $\begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \\ -5 & 3 & 3 \end{bmatrix}$

o. $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & -5 & 3 \\ 2 & 2 & -5 \end{bmatrix}$

p. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 3 & -5 & 3 \\ -2 & 2 & -3 \end{bmatrix}$

iq. $\begin{bmatrix} 5 & 6 & 1 & 5 \\ 2 & -3 & -5 & 3 \\ -5 & -2 & 3 & -7 \\ 4 & 6 & 2 & -6 \end{bmatrix}$

r. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -2 & -3 & -5 & 3 \\ 3 & 0 & 4 & -5 \\ -3 & 4 & 5 & -1 \end{bmatrix}$

Problemas propuestos

- En una feria agroecológica durante el viernes se vendieron 3 cajas de frutilla, 2 cajas de manzanas y 4 cajas de duraznos, durante el sábado 2 cajas de frutilla, 1 cajas de manzana y 3 cajas de duraznos. Finalmente, el domingo la venta fue de 1 caja de frutilla, 1 caja de manzana y 1 caja de duraznos. Determine la cantidad total de cada tipo de fruta vendida durante la feria agroecológica.
- En el año 2021 en una granja había 25 cerdas y 15 cerdos, actualmente existen 12 cerdas más y el doble de cerdos. Determine la cantidad de cerdas y cerdos que hay en la granja.

3. Un comerciante de lácteos, oferta dos tipos de leche: deslactosada y entera. Durante una semana vendió 15 fundas de leche deslactosada y 25 fundas de leche entera. La semana siguiente comercializó 25 fundas de leche entera y 40 fundas de leche deslactosada. Determine la cantidad de fundas de leche deslactosada y entera que vendió durante las dos semanas.
4. Luís, Ricardo y José son propietarios de tres restaurantes, juntos van a una feria agroecológica para comprar hortalizas. Luis compró 10 lechugas, 10 brócolis, 5 kg de zanahorias y 5 kg de cebolla. Ricardo compró el 10 % de lo que compró Luis, mientras José compró el doble de lo que compró Ricardo más Luis. Determine la cantidad total de lechuga, brócoli, zanahoria y cebolla que compraron Luís, Ricardo y José.
5. Una comerciante vendió durante el día lunes 2 kg de borrego, 1 kg de res, 2 pollos y 2 cubetas de huevos; el martes vende el 50 % de lo comercializado el lunes; el miércoles vende la misma cantidad de borrego y res, pero la mitad de pollos y cubetas de huevos del día lunes. Finalmente, el jueves la venta fue el tripe de lo vendido el lunes. Determine la cantidad total de borrego, res, pollos y cubetas de huevos vendidas durante los cuatro días.
6. En dos mercados populares se oferta tres variedades de papas: capira, chola y súper-chola.
La venta en kg del primer mercado está dada por la matriz A.

$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} C & Ch & Sch \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 300 & 310 & 400 \end{bmatrix}_{1 \times 3} & \text{Mercado 1} \end{matrix}$$

La comercialización del segundo mercado está dada por la matriz B

$$b = \begin{matrix} & \begin{matrix} C & Ch & Sch \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 200 & 110 & 200 \end{bmatrix}_{1 \times 3} & \text{Mercado 2} \end{matrix}$$

- a. ¿Cuántos kg de papa capira, chola y súper-chola vendieron los mercados?

- b. Si los mercados tienen por meta vender un 20 % más
¿Cuál sería la cantidad en kg que deben vender por cada
variedad?
7. Luisa y Carlos van juntos a comprar hortalizas. Si Luisa
por semana compra 8 lechugas, 5 brócolis, 12 cebollas y 4
repollo. Carlos cada semana compra 5 lechugas, 4 brócolis,
10 cebollas y 5 repollo. Calcule:
- La cantidad de hortalizas que cada uno compra por mes.
 - La cantidad hortalizas que cada uno compra al año.
8. Una granja en el mes de enero del 2021, tenía 60 vacas y
120 terneras. Actualmente tiene solo el 20 % de terneras y
el 30 % de vacas. Calcule:
- ¿Cuántas vacas y terneras ya no están en la granja?
 - Si el propietario compra 10 terneras y 5 vacas más ¿Cuál
sería la cantidad de vacas y terneras que tiene actualmente
la granja?
9. María, Lizbeth y José van juntos a comprar productos en
una feria agroecológica. María compra 1 sambo, 2 fundas de
mashua, 1 funda de mellocos y 5 zapallos. Lizbeth compra
2 sambos, 1 funda de mashua, y 2 fundas de mellocos. José
solo compra 3 fundas de mellocos y 3 zapallos.
Determine:
- Cuántas fundas de mellocos compraron María, Lizbeth
y José.
 - Cuántos zapallos compraron entre los 3.
10. Un pequeño distribuidor surte de frutas a las tiendas A, B y
C. A la tienda A le venden 50 kg de taxo, 40 kg de granadilla
y 40 kg de babacos. A la tienda B, 28 kg de babacos, 80 kg
de granadilla y 35 kg de taxo. A la tienda C, 25 kg de baba-
cos, 45 kg de granadillas y 50 kg de taxo. Sabiendo que el
precio por kg de taxo, granadilla y babaco es de \$1,7, \$1,50
y \$1,45. Calcule:
- La cantidad en kilogramos por variedad de fruta que
vendió el pequeño comerciante.
 - El ingreso por la venta de todas las frutas.

11. Tres campesinos cultivan maíz simultáneamente en sus fincas. El primero cultiva 1000 m^2 , el segundo 1500 m^2 y el tercero 1450 m^2 , si aproximadamente por metro cuadrado se cosecha 7 mazorcas. Determine la cantidad de mazorcas que cosecha cada campesino.
12. Un pequeño distribuidor comercializa cubetas con huevos de tres tamaños diferentes; pequeños, medianos y grandes. Si la venta de la primera semana es de 14, 18 y 20 cubetas respectivamente, la segunda semana disminuye al 50 %, pero la tercera y cuarta semana es el doble de venta generada durante la primera semana. Determine el ingreso por la venta de todas las cubetas de huevos, considere el precio por tamaño de cubeta con huevo igual a: \$2, \$2,5 y \$3 respectivamente.
13. Una bodega vende semillas de fréjol, arveja y haba, durante el lunes vende 2 quintales de fréjol, 3 quintales de arveja y 4 quintales de haba. El martes vende el 80 % de lo comercializado el lunes. El miércoles y jueves vende el 35 % de lo vendido el martes. Finalmente, el viernes vendió lo mismo que el lunes. Si por quintal el precio de fréjol es \$30, de arveja \$40 y de haba \$50. Determine:
 - a. ¿Cuántos quintales vendió el comerciante de los 3 granos durante la semana?
 - b. ¿Cuál es el ingreso total por la venta de los granos?
 - c. ¿Cuál es la diferencia en porcentaje entre el grano más y menos vendido?
14. La superficie de una vaquera está representada por un triángulo cuyas coordenadas de los vértices son los puntos $A(5, 8)$, $B(10, 20)$ y $C(30, 6)$, considere que las unidades de medidas están en metros. Determine:
 - a) El gráfico de la superficie de la vaquera representada por el triángulo.
 - b) El área de la superficie usando determinantes.
 - c) Compare los resultados.
15. La superficie de una porqueriza está representada por un paralelogramo cuyas coordenadas de los vértices son los

puntos $A(0, 0)$, $B(5, 5)$, $C(10, 3)$ y $(15, 8)$, considere que las unidades de medidas están en metros. Determine:

- a. El gráfico de la superficie de la porqueriza representada por el paralelogramo.
- b. El área de la superficie de la porqueriza utilizando determinantes.
- c. El área de la superficie de la porqueriza mediante el gráfico del literal anterior y el uso de la ecuación $A_{\Delta} = b \cdot h$
- d. Compare los resultados.